DYNAMIQUE DES FONCTEURS ET EXTENSION À L'INFINI DE L'OPERATEUR DE DIRAC

Jean Louis Jonot

DYNAMIQUE DES FONCTEURS ET EXTENSION À L'INFINI DE L'OPÉRATEUR DE DIRAC.

JONOT JEAN LOUIS

Abstract. Dans cet article on développe un procédé d'extension de l'opérateur de Dirac à des structures hilbertiennes. On définit l'opérateur de Dirac sur une variété $\mathcal{W}$ de dimension finie munie d'une structure de spin et ensuite on étend cet opérateur en utilisant la dynamique des foncteurs du fibré de Clifford $\mathrm{Cl}(\mathcal{W})$ et du fibré $\mathrm{End}\,(\zeta) \approx \zeta' \otimes \zeta$.

1. Introduction

Les constructions suivantes permettent de compléter l'article [1] sur l'extension des actions de Clifford à l'infini. On se fixe une catégorie $\mathcal{C}$, un foncteur $\mathcal{F}$ et un objet O de cette catégorie. Si

$$\iota \in \mathrm{Mor}\,(O, \mathcal{F}\,(O))\,,\ \text{respectivement}\ \iota \in \mathrm{Mor}\,(\mathcal{F}\,(O)\,, O)\,,$$

on définit le système inductif, respectivement projectif,

$$\{O_n, \iota_{nm}\}\,,\ \iota_{nm} = \iota_{m-1}\iota_{m-2}\cdots\iota_n$$

avec $\mathcal{F}\,(O_n) = O_{n+1}$, $\iota_{n+1} = \mathcal{F}\,(\iota_n)$, $O_0 = O$ et $\iota_0 = \iota$. Les limites inductives, respectivement projectives, si elles existent permettent une extension de certains opérateurs à l'infini. Pour un objet $O \in \mathrm{Obj}\,(\mathcal{C})$ et un morphisme

$$\iota : O \longrightarrow \mathcal{F}\,(O)\,,$$

si la limite inductive existe, pas nécessairement dans la catégorie $\mathcal{C}$. On définit de même la limite projective pour une paire (O, j) où

$$j : \mathcal{F}\,(O) \longrightarrow O,$$

le domaine de stabilité est formé des paires (O, i), respectivement (O, j) pour lesquelles les limites suivantes

$$\varinjlim O_n,\ \text{respectivement}\ \varprojlim O_n,\ \text{existent}$$

et on pose, respectivement,

$$\mathcal{F}_\infty\,(O) = \varinjlim O_n\ \text{et}\ \mathcal{F}^\infty\,(O) = \varprojlim O_n$$

ces limites. Dans ce qui suit, on s'intéresse à deux systèmes dynamiques permettant d'étendre l'opérateur de Dirac à un fibré hilbertien, à savoir, les foncteurs End_∞, Cl_∞ et à leur complétion respective $\mathfrak{End}_\infty$, $\mathfrak{Cl}_\infty$.

Date: 22/12/2022.
2020 *Mathematics Subject Classification.* 28A05, 28A33, 40A05, 40A10, 42A20, 47L20, 47L60.
Key words and phrases. Foncteur, action de Clifford, fibré de Clifford, variété à spin, limite inductive, limite surjective, fibré spinoriel.

2. Les foncteurs End_∞ et $\mathfrak{End}_\infty$

Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie euclidien si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, hermitien si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, et une base $\{e_i\}$ orthonormée

$$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij},$$

de V. On munit l'algèbre unitaire $\mathrm{End}\,(V)$ du produit scalaire pour lequel la base $\{e_i'\otimes e_j\}$ soit une base orthonormée

$$\langle e_i'\otimes e_j, e_k'\otimes e_l\rangle = \langle e_i', e_k'\rangle \langle e_j, e_l\rangle = \delta_{ij}^{kl}.$$

On pose par itération

$$\mathrm{End}_{\,0}\,(V) = V,\ \mathrm{End}_{\,1}\,(V) = \mathrm{End}\,(V) \text{ et } \mathrm{End}_{\,n+1}\,(V) = \mathrm{End}\,(\mathrm{End}_{\,n}\,(V))\,,\,\forall n\in\mathbb{N},$$

le produit scalaire euclidien ou hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur V est noté $\langle\cdot,\cdot\rangle_0$ et la norme associée est $\|\cdot\|_0$ et par itération on pose $\langle\cdot,\cdot\rangle_n$ le produit scalaire sur $\mathrm{End}_{\,n}\,(V)$ et $\|\cdot\|_n$ la norme associée. Pour $n\geqslant 1$ on définit l'isomorphisme d'algèbres ι_n par

$$\iota_n : \mathrm{End}_{\,n}\,(V) \longrightarrow \mathrm{End}_{\,n+1}\,(V)\,,\ \iota_n\,(\mathfrak{e}) = \theta_n\,(1_n'\otimes\mathfrak{e}) \tag{2.1}$$

où θ_n est l'isomorphisme canonique

$$\theta_n : \mathrm{End}_{\,n}\,(V)'\otimes \mathrm{End}_{\,n}\,(V) \longrightarrow \mathrm{End}_{\,n+1}\,(V)$$

$$\theta_n\,(x'\otimes y) : \mathrm{End}_{\,n}\,(V) \longrightarrow \mathrm{End}_{\,n}\,(V)\,,\ \theta_n\,(x'\otimes y)\,z = x'\,(z)\,y$$

et $1_n'$ est l'élément neutre de $\mathrm{End}_{\,n}\,(V)'$. On définit ainsi un système inductif $\{\mathrm{End}_{\,n}\,(V)\,,\iota_{nm}\}$ avec

$$\iota_{nm} : \mathrm{End}_{\,n}\,(V) \longrightarrow \mathrm{End}_{\,m}\,(V)\,,\ \iota_{nm} = \iota_{m-1}\circ\iota_{m-2}\circ\cdots\circ\iota_n,$$

la limite inductive est notée

$$\mathrm{End}_{\,\infty}\,(V) = \varinjlim \mathrm{End}_{\,n}\,(V)$$

$\mathrm{End}_{\,\infty}\,(V)$ a une structure d'espace de Fréchet, il est muni d'une norme incompatible avec cette structure $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$, pour cette norme $\mathrm{End}_{\,\infty}\,(V)$ est un pré-banach si V est réel et un préhilbertien si V est complexe. La complétion de $\mathrm{End}_{\,\infty}\,(V)$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ est notée $\mathfrak{End}_\infty\,(V)$ qui est un espace de Banach si V est réel et un espace de Hilbert si V est complexe.

Soit $\zeta = (E\,(\zeta)\,,\pi_\zeta,\mathcal{W},V)$ un fibré vectoriel de dimension finie sur une variété paracompacte connexe. Le fibré $\mathrm{End}\,(\zeta)$ est le fibré de fibre $\mathrm{End}\,(V)$ dont les applications de transition s'écrivent comme suit, si W_α et W_β sont deux cartes de trivialisation pour ζ, d'intersection non vide, on pose

$$\tau_{\alpha\beta} : W_\alpha\cap W_\beta \longrightarrow\,,\ \tau_{\alpha\beta}\,(w)\in \mathrm{Gl}\,(V)$$

les applications de transition de ζ, le fibré $\mathrm{End}\,(\zeta)$ a pour applications de transition

$$\widehat{\tau_{\alpha\beta}} : W_\alpha\cap W_\beta \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathrm{End}\,\,(V))\,,\ \widehat{\tau_{\alpha\beta}}\,(w)\in \mathrm{Gl}\,(\mathrm{End}\,(V))$$

avec

$$\widehat{\tau_{\alpha\beta}}\,(w) : \mathrm{End}\,\,(V) \longrightarrow \mathrm{End}\,\,(V)\,,\ \widehat{\tau_{\alpha\beta}}\,(w)\,u = \tau_{\alpha\beta}\,(w)\circ u\circ\tau_{\alpha\beta}\,(w)^{-1}.$$

On note $\mathrm{End}_n\,(\zeta)$ le fibré défini par itération en posant

$$\mathrm{End}_{\,0}\,(\zeta) = \zeta,\ \mathrm{End}_{\,1}\,(\zeta) = \mathrm{End}\,\,(\zeta) \text{ et } \mathrm{End}_{\,n+1}\,(\zeta) = \mathrm{End}\,\,(\mathrm{End}_{\,n}\,(\zeta))\,,$$

si les applications de transition de $\mathrm{End}_{n}(\zeta)$ sont $\tau_{\alpha\beta,n}(w)$ alors les applications de transition de $\mathrm{End}_{n+1}(\zeta)$ sont

$$\widehat{\tau_{\alpha\beta,n+1}}(w)\,u=\tau_{\alpha\beta,n}(w)\circ u\circ\tau_{\alpha\beta,n}(w)^{-1},\ \forall n.$$

Lemma 1. *Soit* $\tau\in\mathrm{Inv}(\mathrm{End}_n(V))\subset\mathrm{End}_{n+1}(V)$ *alors si on pose*

$$\widehat{\tau}u=\tau\circ u\circ\tau^{-1},\ \forall u\in\mathrm{End}_{n}(V)$$

on a

$$\iota_n\circ\tau=\widehat{\tau}\circ\iota_n. \tag{2.2}$$

Proof. Pour tout $\mathfrak{e}\in\mathrm{End}_n(V)$

$$(\iota_n\circ\tau)(\mathfrak{e})=\iota_n(\tau\mathfrak{e})=\theta_n(1'_n\otimes\tau\mathfrak{e})$$

et si $\{\mathfrak{e}_\alpha\}$ est une base de $\mathrm{End}_n(V)$ et $\mathfrak{e}_{\alpha\beta}=\theta_n(\mathfrak{e}'_\alpha\otimes\mathfrak{e}_\beta)$

$$\begin{aligned}(\widehat{\tau}\mathfrak{e}_{\alpha\beta})\,\mathfrak{e}_\gamma&=\left(\tau\circ\mathfrak{e}_{\alpha\beta}\circ\tau^{-1}\right)\mathfrak{e}_\gamma=\mathfrak{e}'_\alpha\left(\tau^{-1}\mathfrak{e}_\gamma\right).\tau\mathfrak{e}_\beta=\left(\tau^{-1}\right)'(\mathfrak{e}'_\alpha)\,\mathfrak{e}_\gamma.\tau\mathfrak{e}_\beta\\&=\theta_n\left(\left(\tau^{-1}\right)'(\mathfrak{e}'_\alpha)\otimes\tau\mathfrak{e}_\beta\right)\mathfrak{e}_\gamma\end{aligned}$$

$$\widehat{\tau}\mathfrak{e}_{\alpha\beta}=\theta_n\left(\left(\left(\tau^{-1}\right)'\otimes\tau\right)(\mathfrak{e}'_\alpha\otimes\mathfrak{e}_\beta)\right)=\theta_n\left(\left(\tau^{-1}\right)'\otimes\tau\right)\mathfrak{e}_{\alpha\beta},$$

$$\widehat{\tau}=\theta_n\left(\left(\tau^{-1}\right)'\otimes\tau\right)$$

$$\widehat{\tau}\circ\iota_n(\mathfrak{e})=\theta_n\left(\left(\left(\tau^{-1}\right)'\otimes\tau\right)(1'_n\otimes\mathfrak{e})\right)=\theta_n(1'_n\otimes\tau\mathfrak{e}),$$

l'égalité

$$\iota_n\circ\tau=\widehat{\tau}\circ\iota_n$$

est vérifiée. □

L'extension des applications de transition $\tau_{\alpha\beta}(w)$ à $\widehat{\tau_{\alpha\beta}}(w)$, permet de définir la famille de fibrés vectoriels $\{\mathrm{End}_n(\zeta)\}$, en posant

$$\mathrm{End}_0(\zeta)=\zeta,\ \mathrm{End}_1(\zeta)=\mathrm{End}(\zeta)\ \text{ et }\ \mathrm{End}_{n+1}(\zeta)=\mathrm{End}(\mathrm{End}_n(\zeta)),$$

les applications $\{\tau_{\alpha\beta,n}(w)\}$ sont les applications de transition des fibrés $\mathrm{End}_n(\zeta)$ définies par itération

$$\tau_{\alpha\beta,0}(w)=\tau_{\alpha\beta}(w),\ \tau_{\alpha\beta,1}=\widehat{\tau_{\alpha\beta,0}}(w),\ \tau_{\alpha\beta,n+1}(w)=\widehat{\tau_{\alpha\beta,n}}(w),\ \forall n \text{ et } \in W_\alpha\cap W_\beta,$$

de fibre $\mathrm{End}_n(V)$. La relation 2.2 appliquée aux applications $\tau_{\alpha\beta,n}(w)$ permet de définir une famille d'applications par limite inductive

$$\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)=\varinjlim\tau_{\alpha\beta,n}(w)$$

qui définit une structure de cocycles. Le fibré, de fibre $\mathrm{End}_{\infty}(V)$ et d'applications de transition $\{\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)\}$, est noté $\mathrm{End}_{\infty}(\zeta)$. Les applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)$ sont continues pour la topologie limite inductive qui fait de $\mathrm{End}_{\infty}(V)$ un espace de Fréchet.

L'espace $\mathrm{End}_\infty(V)$ muni du produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$ est un espace préhilbertien réel ou complexe, non complet. Le complété de $\mathrm{End}_\infty(V)$ muni de ce produit scalaire est noté $\mathfrak{End}_\infty(V)$. On peut clarifier la situation en se donnant une suite de bases orthonormées $\mathbf{e}_n$ de $\mathrm{End}_n(V)$ telle que

$$\iota_n(\mathbf{e}_n)\subset\mathbf{e}_{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N},$$

cette suite existe en utilisant le procédé de Gram-Schmidt, la limite inductive $\{\mathbf{e}_n, \iota_{nm}\}$ est notée

$$\mathfrak{e} = \varinjlim \mathbf{e}_n,\ \mathfrak{e} = \{\mathfrak{e}_n\} \text{ avec } in\,(\mathbf{e}_n) = \{\mathfrak{e}_k : k \leqslant n\}\,,$$

l'application $in\,(e)$ est la classe d'équivalence dans $\mathfrak{e}$ de $e \in \cup \mathbf{e}_n$. L'espace vectoriel

$$\mathfrak{End}_\infty\,(V) = \left\{ \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \mathfrak{e}_n : \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2 < +\infty \right\}$$

est muni d'une norme

$$\left\| \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n \mathfrak{e}_n \right\|_\infty = \sqrt{\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^2}$$

et

$$\mathrm{End}_\infty\,(V) \subset \mathfrak{End}_\infty\,(V)\,,$$

$\mathfrak{End}_\infty\,(V)$ est un espace de Banach si V est euclidien et un espace hilbertien si V est hermiten avec $\mathfrak{e}$ est une base de Schauder si V est euclidien et c'est une base hilbertienne si V est hermitien. On définit l'application linéaire

$$in_n : \mathrm{End}_n\,(V) \longrightarrow \mathfrak{End}_\infty\,(V)\,,\ in_n\,(e) = in\,(e) \text{ pour tout } e \in \mathbf{e}_n$$

alors in_n est une isométrie. L'application de transition $\tau_{\alpha\beta,\infty}\,(w)$ est définie sur le sous-espace vectoriel formé des combinaisons linéaires finies d'éléments de $\mathfrak{e}$, c'est-à-dire, sur $\mathrm{End}_\infty\,(V)$. Ces applications sont continues pour la topologie limite inductive mais pas, en général, pour la norme de $\mathfrak{End}_\infty\,(V)$, on ne peut donc pas les prolonger à $\mathfrak{End}_\infty\,(V)$. On a une extension si le fibré ζ est orthogonal, c'est-à-dire, si les applications de transition du fibré ζ sont dans le groupe orthogonal de V. On dit que ζ est un fibré orthogonal.

Lemma 2. *Si le fibré ζ est orthogonal, les extensions des applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}\,(w)$ s'étendent à $\mathfrak{End}_\infty\,(V)$ en des applications $\mathfrak{t}_{\alpha\beta,\infty}\,(w)$, la famille $\{\mathfrak{t}_{\alpha\beta,\infty}\}$ définit une structure de cocycles dont le fibré est noté $\mathfrak{End}_\infty\,(\zeta)$.*

Definition 1. *Un fibré est complet si les applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}\,(w)$ sont normalement continues. Le fibré d'applications de transition $\mathfrak{t}_{\alpha\beta,\infty}\,(w)$ est noté $\mathfrak{End}_\infty\,(\zeta)$.*

Soit Q est une forme quadratique non dégénérée sur V pour laquelle la base $\mathbf{e}_0$ est orthogonale alors on définit la forme quadratique $\widetilde{Q}$ sur $\mathrm{End}_1\,(V)$ vérifiant

$$\widetilde{Q}\,(e_{ij}) = Q\,(e_i)\,Q\,(e_j)\,,\ \forall v, \forall u \text{ avec } e_{ij} = e'_j \otimes e_i.$$

Par itération, on définit une forme quadratique sur $\mathrm{End}_n\,(V)$ en posant

$$Q_0 = Q,\ Q_1 = \widetilde{Q} \text{ et } Q_{n+1} = \widetilde{Q_n},$$

Q_n est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathrm{End}_n\,(V)$ pour laquelle $\mathbf{e}_n$ est une base orthogonale, obtenue par itération en posant

$$\mathbf{e}_1 = \widetilde{\mathbf{e}_0} = \left\{ e'_j \otimes e_i \right\} \text{ et } \mathbf{e}_{n+1} = \widetilde{\mathbf{e}_n}.$$

La forme quadratique à l'infini Q_∞ est définie par

$$Q_\infty\,|_{\mathrm{End}_n(V)} = Q_n,\ \forall n,$$

l'extension continue de Q_∞ à $\mathfrak{End}_\infty\,(V)$, si elle existe, est notée $\mathbf{Q}_\infty$.

Peut-on donner un critère sur le groupe de structure du fibré ζ qui permet de prolonger le fibré $\mathrm{End}_\infty\,(V)$ en un fibré complet? L'idée est de construire une forme quadratique $\mathbf{Q}$ pour laquelle le groupe de structure du fibré est contenu dans $\mathrm{O}(V, \mathbf{Q})$. Un sous-groupe G de $\mathrm{Gl}(V)$, localement compact, est un groupe de Haar si il existe une forme quadratique Q sur V, définie positive, telle que

$$\tau \in G \longrightarrow Q(\tau(v)) \in \mathbb{R}^{+}$$

est dans $\mathrm{L}^{1}(G, \lambda)$ pour tout $v \in V$ où λ est une mesure de Haar sur G. Sous cette hypothèse, on peut construire une forme quadratique définie positive

$$\mathbf{Q}(v) = \int_{G} Q(\tau(v)) \lambda(\tau),$$

si $\mathbf{g}$ est la forme polaire de $\mathbf{Q}$, alors

$$\mathbf{g}(\sigma(u), \sigma(v)) = \int_{G} g(\tau\sigma(u), \tau\sigma(v)) \lambda(\tau) = \mathbf{g}(u, v), \ \forall \sigma \in G \text{ et } u, v \in V$$

et $G \subset \mathrm{O}(V, \mathbf{Q})$. Si le groupe G est compacte l'application

$$\tau \longrightarrow Q(\tau(v))$$

est continue donc bornée et $\mathbf{g}(x, y) \in \mathbb{R}$, $\mathbf{g}$ est une forme bilinéaire non dégénérée positive pour laquelle $G \subset \mathrm{O}(V, \mathbf{Q})$. On peut donc étendre les applications de transition $\tau_{\alpha\beta,\infty}$ en des applications $\mathfrak{t}_{\alpha\beta,\infty}$ de $\mathfrak{End}_{\infty,\mathbf{Q}}(V)$ qui est la complétion de $\mathrm{End}_{\infty}(V)$ pour la norme induite par $\mathbf{Q}$. On peut énoncer le théorème suivant,

Theorem 1. *Si le groupe G engendré par les applications de transition $\tau_{\alpha\beta}(w)$ de ζ est un groupe de Haar alors il existe un fibré $\mathfrak{End}_{\infty,\mathbf{Q}}(\zeta)$, de fibre $\mathfrak{End}_{\infty,\mathbf{Q}}(V)$ où $\mathbf{Q}$ est une forme quadratique invariante sous l'action de G, pour lequel le fibré de Fréchet $\mathrm{End}_{\infty}(\zeta)$ est un sous fibré dense.*

On se fixe une forme quadratique Q définie positive et une base orthonormée $\{e_i\}$, on note $\left(\lambda_i^j(\tau)\right)$ la matrice de $\tau \in \mathrm{Gl}(V)$ dans cette base. On rappelle que si $\mathrm{Gl}(V)$ est identifié à $\mathrm{Gl}(\mathbb{R}, n)$ alors une mesure de Haar à droite peut être définie par

$$\mu(B) = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{|\det(X)|^{n}} dX,$$

dX est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^{n^2}$ et $\mathcal{B} = \varphi(B)$, φ est un isomorphisme de l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^{n^2}$.

$$\tau(e_i) = \lambda_i^j(\tau) e_j, \ Q(\tau(e_i)) = \sum_{j=1}^{n} \left|\lambda_i^j(\tau)\right|^2,$$

on pose

$$\phi_i(X) = \sum_{j=1}^{n} \left|X_i^j\right|^2, \ X_i^j = \lambda_i^j(\tau)$$

alors

$$\mathbf{Q}(e_i) = \int_{\mathcal{G}} \frac{\phi_i(X)}{|\det(X)|^{n}} dX, \ \mathcal{G} = \varphi(G).$$

Soit

$$\chi_i : X = \left(X_k^l\right) \longrightarrow \frac{\sum_{j=1}^{n} \left|X_i^j\right|^2}{\left|\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} X_i^{\sigma(i)}\right|^{n}}$$

si les applications $\chi_i \mid_{\mathcal{G}} \in \mathrm{L}^1\left(\mathbb{R}^{n^2}, dX\right)$ alors G est un groupe de Haar. L'application χ_i vérifie

$$\chi_i\left(\left(X_k^l\right)\right) = \frac{\sum_{j=1}^n \left|X_i^j\right|^2}{\left|\sum_{j=1}^n X_i^j\left(-1\right)^{i+j}\det\left(\mathbf{X}_{ji}\right)\right|^n} = \frac{\sum_{j=1}^n \left|X_i^j\right|^2}{\left|\sum_{j=1}^n X_i^j\left(-1\right)^{j}\det\left(\mathbf{X}_{ji}\right)\right|^n}$$

où $\mathbf{X}_{ji}$ est la matrice $X = \left(X_k^l\right)$ à laquelle on a retiré la $j^{ième}$ ligne et $i^{ième}$ colonne. Si on prend le produit scalaire canonique $\langle\cdot,\cdot\rangle$ sur $\mathbb{R}^n$ et que l'on pose

$$\mathbf{X}_i = \left(\left(-1\right)^j\det\left(\mathbf{X}_{ji}\right)\right) = \left(-\det\left(\mathbf{X}_{1i}\right), \det\left(\mathbf{X}_{2i}\right), \cdots, \left(-1\right)^n\det\left(\mathbf{X}_{ni}\right)\right),$$

$$X_i = \left(X_i^1, X_i^2, \cdots, X_i^n\right)$$

alors

$$\chi_i\left(\left(X_k^l\right)\right) = \frac{\langle X_i, X_i\rangle}{\left|\langle X_i, \mathbf{X}_i\rangle\right|^n}$$

et

$$\chi_i\left(\left(X_k^l\right)\right) = \frac{\langle X_i, X_i\rangle}{\left|\langle X_i, \mathbf{X}_i\rangle\right|^n}.$$

Theorem 2. *Avec les notations précédentes, si*

$$\frac{\langle X_i, X_i\rangle}{\left|\langle X_i, \mathbf{X}_i\rangle\right|^n}\mathbf{1}_{\mathcal{G}} \in \mathrm{L}^1\left(\mathbb{R}^{n^2}, dX\right), \forall i = 1, 2, \cdots, n,$$

le fibré ζ de base $\mathcal{W}$ et de groupe structural G définit un fibré de Fréchet $\mathrm{End}_\infty(\zeta)$ *qui peut être étendu en un fibré de Banach $\mathfrak{End}_\infty(\zeta)$.*

3. Les foncteurs Cl_∞ et $\mathfrak{Cl}_\infty$

ζ est un fibré vectoriel réel ou complexe de dimension finie, de base une variété paracompacte $\mathcal{W}$ et ζ' le fibré dual. Si V désigne la fibre de ζ, les applications de transition du fibré ζ sont données par

$$w \in W_\alpha \cap W_\beta \longrightarrow \tau_{\alpha\beta}(w) \in \mathrm{Gl}(V)$$

et les applications de transition du fibré dual ζ' sont

$$w \in W_\alpha \cap W_\beta \longrightarrow \tau_{\alpha\beta}(w)' \in \mathrm{Gl}(V'),$$

$$d \in V' \longrightarrow \left(\tau_{\alpha\beta}(w)\right)'(d)(v) = d \circ \tau_{\alpha\beta}(w)(v), \forall v \in V$$

$\tau_{\alpha\beta}(w)'$ est la transposée de $\tau_{\alpha\beta}(w)$. Cette application s'étend au complexifié de ζ'. On munit V d'une forme quadratique non dégénérée Q, de signature (p,q) si ζ est un fibré réel et d'une forme quadratique non dégénérée notée encore Q dans le cas complexe. Le fibré de Clifford $\mathrm{Cl}(\zeta, Q)$ est le fibré de fibre $\mathrm{Cl}(V,Q)$, dont les applications de transition sont définies par extension de l'isomorphisme $\tau_{\alpha\beta}(w)$ de V à $\mathrm{Cl}(V,Q)$ en un isomorphisme de l'algèbre $\mathrm{Cl}(V,Q)$, en posant

$$\widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w) : \mathrm{Cl}(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Cl}(V,Q) \text{ est } \mathbb{K}\text{-linéaire, } \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{C} \tag{3.1}$$

vérifiant

$$\widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w)(uv) = \tau_{\alpha\beta}(w)(u)\,\tau_{\alpha\beta}(w)(v) \text{ et } \widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w)(u) = \tau_{\alpha\beta}(w)(u), \forall u, v \in V$$

ces applications de transition ne dépendent que du choix de $\tau_{\alpha\beta}(w)$. On peut définir le fibré $\mathrm{Cl}(\zeta, Q)$ d'applications de transition $\widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w)$ qui est un C^*-fibré réel, respectivement complexe, si ζ est un fibré vectoriel réel, respectivement complexe.

Remark 1. *Si* $\mathrm{Inv}(V,Q)$ *est le groupe de Lie des éléments inversibles de* $\mathrm{Cl}(V,Q)$ *alors*

$$\widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w)(\mathrm{Inv}(V,Q)) \subset \mathrm{Inv}(V,Q),$$

$\sigma_{\alpha\beta}(w) = \widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w)\,|_{\mathrm{Inv}(V,Q)}$ *est une famille de cocycles de classe* C^∞*, le fibré obtenu est le fibré de Lie associé à* ζ*, de fibre* $\mathrm{Inv}(V,Q)$ *et de base* $\mathcal{W}$*, on le note* $\mathrm{Lie}(\zeta)$.

Dans le cas complexe, $\mathrm{Cl}(\zeta,Q)$ est noté $\mathrm{Cl}(\zeta)$. Dans $\mathrm{Cl}(\zeta)$ l'involution est définie sur chaque fibre $E_w(\mathrm{Cl}(\zeta))$ de $\mathrm{Cl}(\zeta)$ par

$$(\lambda v_1 \cdots v_k)^* = \overline{\lambda} v_k \cdots v_1,\ v_i \in E_w(\mathrm{Cl}(\zeta))$$

et est étendue par linéarité sur $E_w(\mathrm{Cl}(\zeta))$. On peut ainsi définir s^*, pour une section continue $s \in \Gamma(\mathrm{Cl}(\zeta))$, par

$$s^*(w) = s(w)^*,\ \forall w \in \mathcal{W}.$$

On décompose en somme de Whitney le fibré $\mathrm{Cl}(\zeta,Q)$

$$\mathrm{Cl}(\zeta,Q) = \mathrm{Cl}^+(\zeta,Q) \oplus \mathrm{Cl}^-(\zeta,Q)$$

où $\mathrm{Cl}^\pm(\zeta,Q)$ est le sous-fibré de $\mathrm{Cl}(\zeta,Q)$, de fibre $\mathrm{Cl}^\pm(V,Q)$ et dont les applications de transition sont

$$\widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w)_\pm = \widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w)\,|_{\mathrm{Cl}^\pm(V,Q)}.$$

La $\mathbb{Z}_2$-graduation associée χ est définie par

$$\chi(w)(v) = \pm v \text{ si } v \in E_w\left(\mathrm{Cl}^\pm(\zeta,Q)\right),$$

χ s'étend aux sections s du fibré de Clifford en posant

$$\chi(s)(w) = \chi(w)(s(w)),\ \forall w \in \mathcal{W}.$$

Si la fibre V de ζ est munie d'une forme quadratique non dégénérée Q, $\mathrm{Cl}(V,Q)$ est munie d'une forme quadratique non dégénérée, notée $\widetilde{Q}$. Pour une base orthogonale $\mathfrak{e}_0 = \{e_i\}$ de V avec $Q(e_i) = \pm 1$, la base de $\mathrm{Cl}(V,Q)$

$$\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} : 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n\}$$

est une base orthogonale pour $\widetilde{Q}$ vérifiant

$$\widetilde{Q}(e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}) = \prod_{j=1}^{k} Q\left(e_{i_j}\right) = \pm 1.$$

Pour une forme quadratique Q définie positive on note $|\cdot|_V$ la norme associée pour laquelle la base $\{e_i\}$ est une base orthonormée. La norme associée à $\widetilde{Q}$ est $|\cdot|_{\mathrm{Cl}(V,Q)} = \widetilde{|\cdot|_V}$. Pour ces normes l'inclusion

$$in : V \longrightarrow \mathrm{Cl}(V,Q),\ in(e_i) = e_i$$

est une isométrie et $\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}\}$ est une base orthonormée de $\mathrm{Cl}(V,Q)$ pour $\widetilde{Q}$. On pose, par itération,

$$\mathrm{Cl}_0(V,Q) = V,\ \mathrm{Cl}_1(V,Q) = \mathrm{Cl}(V,Q),\ \mathrm{Cl}_2(V,Q) = \mathrm{Cl}\left(\mathrm{Cl}_1(V,Q), \widetilde{Q}\right),$$

si Q_n est la forme quadratique induite par Q sur $\mathrm{Cl}_n(V,Q)$, $\mathfrak{in}_n$ est l'inclusion de $\mathrm{Cl}_n(V,Q)$ dans $\mathrm{Cl}_{n+1}(V,Q)$ et $\mathfrak{e}_n$ est la base induite par $\mathfrak{e}_0 = \{e_i\}$ avec

$$\mathfrak{e}_1 = \widetilde{\mathfrak{e}}_0 = \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant \dim(V)\}$$

et $\mathfrak{e}_{n+1} = \widetilde{\mathfrak{e}_n}$ alors $\mathfrak{in}_n$ est une isométrie pour les normes $|\cdot|_{\mathrm{Cl}_n(V,Q)}$ et $|\cdot|_{\mathrm{Cl}_{n+1}(V,Q)}$. La limite inductive pour la famille

$$\{\mathrm{Cl}_n(V,Q), \mathfrak{in}_{nm}\}, \ \mathfrak{in}_{nm} = \mathfrak{in}_{m-1} \circ \cdots \circ \mathfrak{in}_n : \mathrm{Cl}_n(V,Q) \longrightarrow \mathrm{Cl}_m(V,Q)$$

est notée $\mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$. A isomorphisme près cette limite ne dépend pas du choix des bases $\mathfrak{e}_0$. Si V est un espace vectoriel complexe, on définit le produit hermitien sur V par

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_j^i$$

et par extension à $\mathrm{Cl}(V)$

$$\langle e_{i_1} \cdots e_{i_k}, e_{j_1} \cdots e_{j_l} \rangle = \delta_{j_1 \cdots j_l}^{i_1 \cdots i_k}.$$

On note $\mathfrak{e}_\infty$ la limite inductive de la famille $\{\mathfrak{e}_n, \mathfrak{in}_{nm}\}$. Si $u \in \mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$, u s'écrit comme une somme finie $u = u^i \mathbf{e}_i$ avec $\mathbf{e}_i \in \mathfrak{e}_\infty$, dans le cas réel ou complexe la norme de u est

$$u_\infty = \sum |u^i|^2,$$

le complété de $\mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$ pour la norme $|\cdot|_\infty$ est un espace de Banach pour lequel $\mathfrak{e}_\infty$ est une base de Schauder dans le cas réel et dans le cas complexe le complété de $\mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$ est un espace de Hilbert pour lequel $\mathfrak{e}_\infty$ est une base hilbertienne.

Definition 2. *$\mathfrak{Cl}_\infty(V,Q)$ est la complétion de $\mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$ pour la norme $|\cdot|_\infty$.*

A isométrie près, $\mathfrak{Cl}_\infty(V,Q)$ est indépendante de $\mathfrak{e}_0$. La topologie définie par $|\cdot|_\infty$ fait de $\mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$ un pré-banach ou un pré-hilbertien et la topologie limite inductive fait de $\mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$ un espace de Fréchet.

Lemma 3. *$\mathfrak{Cl}_\infty(V,Q)$ est une C^*-algèbre réelle si V est un espace vectoriel réel, complexe si V est un espace vectoriel complexe.*

Les applications de transition du fibré $\mathrm{Cl}(\zeta,Q)$ sont défines en 3.1, cette construction s'étend au fibré $\mathrm{Cl}\left(\mathrm{Cl}(\zeta,Q), \widetilde{Q}\right)$ de fibre $\mathrm{Cl}\left(\mathrm{Cl}(V,Q), \widetilde{Q}\right)$ et ayant pour applications de transitions $\widetilde{\widetilde{\tau_{\alpha\beta}}}$. Ce procédé permet de construire une suite de fibrés en posant

$$\mathrm{Cl}_0(\zeta,Q) = \zeta, \ \mathrm{Cl}_1(\zeta,Q) = \mathrm{Cl}(\zeta,Q), \ \mathrm{Cl}_2(\zeta,Q) = \mathrm{Cl}\left(\mathrm{Cl}(\zeta,Q), \widetilde{Q}\right),$$

$$\mathrm{Cl}_3(\zeta,Q) = \mathrm{Cl}\left(\left(\mathrm{Cl}(\zeta,Q), \widetilde{Q}\right), \widetilde{\widetilde{Q}}\right), \ldots\ldots$$

et par itération, on construit $\mathrm{Cl}_n(\zeta,Q)$. La chaîne de Clifford définie un système inductif, si in_n est l'inclusion naturelle

$$\mathrm{in}_n : \mathrm{Cl}_n(\zeta,Q) \longrightarrow \mathrm{Cl}_{n+1}(\zeta,Q),$$

la famille

$$\{\mathrm{Cl}_n(\zeta,Q), \mathrm{in}_{nm}\}, \ \mathrm{in}_{nm} = \mathrm{in}_{m-1} \circ \cdots \circ \mathrm{in}_n : \mathrm{Cl}_n(\zeta,Q) \longrightarrow \mathrm{Cl}_m(\zeta,Q),$$

est un système inductif de limite $\mathrm{Cl}_\infty(\zeta,Q)$ dont les applications de transition sont définies par

$$\tau_{\alpha\beta,\infty}(w) \,|_{\mathrm{Cl}_n(V,Q)} = \tau_{\alpha\beta,n}(w)$$

où $\tau_{\alpha\beta,n}(w)$ sont les applications de transition de $\mathrm{Cl}_n(\zeta,Q)$ définies par itération en posant

$$\tau_{\alpha\beta,0}(w) = \tau_{\alpha\beta}(w), \ \tau_{\alpha\beta,1}(w) = \widetilde{\tau_{\alpha\beta}}(w), \ \tau_{\alpha\beta,n+1}(w) = \widetilde{\tau_{\alpha\beta,n}}(w),$$

les applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)$ sont continues pour la topologie limite inductive sur $\mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$ et vérifient les propriétés des cocycles. On peut donc définir le fibré $\mathrm{Cl}_\infty(\zeta,Q)$ de fibre $\mathrm{Cl}_\infty(V,Q)$ et d'applications de transition $\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)$. Le fibré $\mathfrak{Cl}_\infty(\zeta,Q)$ est le fibré de fibre $\mathfrak{Cl}_\infty(V,Q)$ dont les applications de transition $\mathfrak{t}_{\alpha\beta}$ sont définies par

$$\mathfrak{t}_{\alpha\beta}(w)\,,\; w\in W_\alpha\cap W_\beta$$

où $\mathfrak{t}_{\alpha\beta}(w)$ est l'unique extension de $\tau_{\alpha\beta,\infty}$ à $\mathfrak{Cl}_\infty(V,Q)$ pour les $\tau_{\alpha\beta,\infty}$ de **norme finie**, c'est-à-dire, normalement continues. Les applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)$ sont continues pour la topologie limite inductive mais pas nécessairement de norme finie. Si le fibré ζ est orthogonal alors $\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)$ est continue pour la norme de $\mathfrak{Cl}_\infty(V,Q)$, donc prolongeable de façon unique en des applications $\mathfrak{t}_{\alpha\beta}(w)$ qui vérifient les propriétés des cocycles.

Theorem 3. *$\mathfrak{Cl}_\infty(\zeta,Q)$ est un C^*-fibré réel si ζ est un fibré vectoriel réel et un C^*-fibré complexe si ζ est un fibré vectoriel complexe.*

Pour clarifier les constructions précédentes on rappelle, comme il a été dit en introduction, que ces constructions reposent sur la dynamique d'un foncteur $\mathcal{F}$ dans une catégorie $\mathcal{C}$. La catégorie $\mathcal{C}$ choisie, dans ce qui précède, est la catégorie des espaces euclidiens dans le cas réel et des espaces hermitiens dans le cas complexe, on note V un objet de cette catégorie. Les foncteurs $\mathcal{F}$ etudiés précédemment sont End et Cl. De façon générale, la limite inductive d'un foncteur $\mathcal{F}$, si elle existe, n'est plus en général un objet de la catégorie $\mathcal{C}$. Si les objets de $\mathcal{C}$, sont des espaces vectoriels normés, la topologie limite inductive sur $\mathcal{F}_\infty(V)$ donne des espaces de Fréchet non normalisables si les limites inductives sont strictes. Sur cet espace le produit scalaire euclidien ou hermitien de V permet de construire une structure d'espace pré-banach ou pré-hilbertien incompatible avec la topologie limite inductive. La complétion de $\mathcal{F}_\infty(V)$ pour cette structure est notée $\mathfrak{F}_\infty(V)$. Pour un fibré vectoriel ζ de fibre V, les applications de transition $\{\tau_{\alpha\beta}(w) : w\in W_\alpha\cap W_\beta\}$ s'étendent à l'espace $\mathcal{F}_\infty(V)$ en des applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}$, continues pour la topologie limite inductive. Elles définissent une structure de cocycles, on peut donc définir le fibré $\mathcal{F}_\infty(\zeta)$. Les applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)$ ne sont pas nécessairement continues pour la topologie de la norme. Les applications $\tau_{\alpha\beta,\infty}(w)$, qui sont continues pour la norme, sont prolongeables en des applications $\mathfrak{t}_{\alpha\beta,\infty}(w)$ qui vérifient les propriétés des cocycles. Le fibré $\mathfrak{F}_\infty(\zeta)$ est le fibré de base $\mathcal{W}$, de fibre $\mathfrak{F}_\infty(V)$ et d'applications de transition $\{\mathfrak{t}_{\alpha\beta,\infty}(w) : w\in W_\alpha\cap W_\beta\}$. On gagne en structure algébrique sur la fibre en perdant en structure géométrique, c'est-à-dire, en diminuant le groupe de structucture du fibré $\mathcal{F}_\infty(\zeta)$.

Dans ce qui suit, on donne un exemple de limite projective obtenue par le foncteur $\mathcal{T}$. Sur les fibrés vectoriels ζ, de dimension finie et de base $\mathcal{W}$, ce foncteur $\mathcal{T}$ est défini par

$$\mathcal{T}(\zeta)=\left(T(E_\zeta),\pi_\xi\circ T\pi_\zeta,\mathcal{W},V_{\mathcal{T}(\zeta)}\right)$$

avec

$$V_{\mathcal{T}(\zeta)}=V_\xi\times V_\zeta^2 \tag{3.2}$$

où $\zeta=(E_\zeta,\pi_\zeta,\mathcal{W},V_\zeta)$ et ξ est le fibré tangent de $\mathcal{W}$

$$\xi=(T\mathcal{W},\pi_\xi,\mathcal{W},V_\xi)\,.$$

Le morphisme de fibrés de $\mathcal{T}(\zeta)$ dans ζ est la projection du fibré tangent de base E_ζ

$$\pi_{\xi_{\mathcal{T}(\zeta)}} : T(E_\zeta) \longrightarrow E_\zeta,$$

$\xi_{\mathcal{T}(\zeta)}$ est le fibré tangent de E_ζ, on pose

$$\mathcal{T}_0(\zeta) = \zeta,\ \mathcal{T}_1(\zeta) = \mathcal{T}(\zeta),\ \mathcal{T}_{n+1}(\zeta) = \mathcal{T}(\mathcal{T}_n(\zeta))$$

et

$$\mathfrak{in}_n = \pi_{\xi_{\mathcal{T}_n(\zeta)}},$$

si

$$\mathfrak{in}_{nm} = \mathfrak{in}_m \circ \cdots \circ \mathfrak{in}_n : \mathcal{T}_n(\zeta) \longrightarrow \mathcal{T}_{m-1}(\zeta)$$

alors la limite projective de $\{\mathcal{T}_n(\zeta), \mathfrak{in}_{nm}\}$ est notée $\mathcal{T}^\infty(\zeta)$. Si W_α est une carte de trivialisation pour ζ et ξ alors les cartes $\mathbf{W}_\alpha$ de E_ζ sont données par un isomorphisme

$$\theta_\alpha : \mathbf{W}_\alpha \longrightarrow W_\alpha \times V_\zeta$$

et les applications de transition sont

$$\theta_{\alpha\beta}(w) : V_\zeta \longrightarrow V_\zeta,\ \theta_{\alpha\beta}(w)\, u = \theta_\alpha \circ \theta_\beta^{-1}(w, u)$$

avec $\theta_{\alpha\beta}(w) \in \mathrm{Gl}(V_\zeta)$. On a

$$T\mathbf{W}_\alpha \approx TW_\alpha \times TV_\zeta \approx W_\alpha \times V_\xi \times V_\zeta^2$$

car W_α est un ouvert de trivialisation de ξ, la fibre de $\mathcal{T}(\zeta)$ vérifie 3.2 et les applications de transition du fibré tangent de E_ζ sont

$$\tau_{\alpha\beta}(\mathbf{w}) = T_{\mathbf{w}}\left(\theta_\beta^{-1} \circ \theta_\alpha\right) : T_{\mathbf{w}}E_\zeta \longrightarrow T_{\mathbf{w}}E_\zeta.$$

Si $\zeta = \xi$ le fibré obtenu est $\mathcal{T}^\infty(\xi)$, si il existe. On note $\mathcal{E}$, l'espace total du fibré $\mathcal{T}^\infty(\xi)$ et on suppose que la fibre $\mathcal{B}$ est un espace de Banach, la variété $\mathcal{E}$ devient une variété banachique. On se fixe une métrique fortement riemannienne g sur $\mathcal{E}$, c'est-à-dire, g vérifie pour toute section X du fibré tangent de $\mathcal{E}$,

$$g(X, X) \geqslant 0 \text{ et } g(X, X) = 0 \iff X = 0,$$

et le morphisme $\widetilde{g}_e$

$$\widetilde{g}_e : \Gamma(T\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(T'\mathcal{E}),\ X \longrightarrow \widetilde{g}(X) = \iota_X g_e : Y \longrightarrow g_e(X, Y) \text{ et } e \in \mathcal{E}$$

est un isomorphisme, où $T'\mathcal{E}$ est le fibré dual topologique de $T\mathcal{E}$. Il existe une unique connexion linéaire ∇^g sur le fibré $T\mathcal{E}$ préservant g et à torsion nulle dite connexion de Levi-Civita. Cette connexion induit une connexion sur $T\mathcal{W}$ qui est une connexion linéaire et sans torsion dite connexion de Levi-Civita à l'infini. Si une métrique riemannienne g sur $\mathcal{W}$ pour laquelle la connexion de Levi-Civita associée est une connexion de Levi-Civita à l'infini, on dit que g est une métrique qui s'étend à l'infini.

4. Action de Clifford à l'infini

Pour le fibré tangent ξ sur $\mathcal{W}$ si $\xi'_{\mathbb{C}} = \xi' \otimes \mathbb{C}$ est le complexifié du dual du fibré tangent alors le fibré de Clifford sur $\mathcal{W}$ associé est

$$\mathrm{Cl}\,(\mathcal{W}) = \mathrm{Cl}\,(\xi'_{\mathbb{C}})\,,$$

les fibrés de Clifford à l'infini sont

$$\mathrm{Cl}_{\,\infty}(\mathcal{W}) = \mathrm{Cl}_{\,\infty}(\xi'_{\mathbb{C}}) \text{ et } \mathfrak{Cl}_{\infty}(\mathcal{W}) = \mathfrak{Cl}_{\infty}(\xi'_{\mathbb{C}})\,,$$

en remarquant que le fibré $\mathfrak{Cl}_{\infty}(\mathcal{W})$ existe si les applications de transitions de $\xi'_{\mathbb{C}}$ sont de norme $\leqslant 1$ pour la structure hermitienne de $V_{\mathbb{C}}$. Dans le cas général, les applications de transition de $\mathfrak{Cl}_{\infty}(\mathcal{W})$, sont les applications de transition de $\mathrm{Cl}_{\,\infty}(\mathcal{W})$ de norme finie. Pour une section de formes quadratiques Q sur $\mathcal{W}$, de classe C^p pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note

$$\mathrm{Cl}\,(\mathcal{W}, Q) = \mathrm{Cl}\,(\xi', Q)\,,$$

on rappelle qu'une section de formes quadratiques Q sur $\mathcal{W}$ est de classe C^p, pour $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si pour toute section $s \in \Gamma^p(\zeta)$, l'application

$$w \in \mathcal{W} \longrightarrow Q(w)(s(w)) \in \mathbb{R}$$

est de classe C^p. Soit ζ un fibré vectoriel réel complexe et c un morphisme de C^*-fibrés complexes

$$c : \mathrm{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}(\zeta)\,,$$

l'action de Clifford à gauche associée à c est définie par

$$(s, \mathfrak{s}) \longrightarrow s \cdot \mathfrak{s},\ s \cdot \mathfrak{s}(w) = c(s(w))(\mathfrak{s}(w))\,,$$

pour tout $s \in \Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\mathfrak{s} \in \Gamma(\zeta)$. L'action est continue si

$$s \cdot \mathfrak{s} \in \Gamma(\zeta)\,,\ \forall s \in \Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W})) \text{ et } \forall \mathfrak{s} \in \Gamma(\zeta)\,.$$

Lemma 4. *Si l'action de Clifford est continue alors $\Gamma(\zeta)$ a une structure de $(\Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W})), C(\mathcal{W}))$-bimodule.*

Sauf mention contraire, les actions de Clifford sont continues. Si $\zeta = \mathfrak{F}$ est un fibré hilbertien, on remplace $\mathrm{End}(\mathfrak{F})$ par le fibré $\mathfrak{F}_{\mathcal{B}}$ dans la définition [1]. Le C^*-fibré $\mathrm{Cl}(\mathcal{W})$ est isométriquement représentable dans le fibré hilbertien $\mathfrak{F}$, c'est le théorème **GNS** [1]. Si ρ désigne une représentation, ρ est continue si

$$w \in \mathcal{W} \longrightarrow \rho(s(w))(\mathfrak{s}(w))$$

est une section continue de $\mathfrak{F}$ pour tout $s \in \Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\mathfrak{s} \in \Gamma(\mathfrak{F})$. L'espace des sections continues de $\mathfrak{F}$ a une structure de $(\Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W})), C(\mathcal{W}))$-bimodule. La continuité et la notion de différentiabilité en dimension infinie sont données dans le sens de Banach.

Definition 3. *Un module de Clifford sur $\mathcal{W}$ est la donnée d'un $C(\mathcal{W})$-module $\Gamma(\zeta)$ des sections continues d'un fibré vectoriel complexe ζ de base $\mathcal{W}$ et d'un morphisme $C(\mathcal{W})$-linéaire*

$$\mathbf{c} : \Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W})) \longrightarrow \mathrm{End}(\Gamma(\zeta))\,,$$

c'est un $(\Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W})), C(\mathcal{W}))$-bimodule de sections continues d'un fibré vectoriel complexe ζ de base $\mathcal{W}$.

Remark 2. *Avec les notations précédentes, $\mathbf{c}(s) = c \circ s$.*

L'action de Clifford est irréductible si les seuls sous-espaces invariants de $E_w(\zeta)$, sous l'action de Clifford sur chaque fibre

$$\mathbf{c}(w) : E_w(\mathrm{Cl}(\mathcal{W})) \longrightarrow E_w(\mathrm{End}(\zeta)),$$

sont $\left\{0_{E_w(\mathcal{F})}\right\}$ et $E_w(\zeta)$ pour tout $w \in \mathcal{W}$. L'action est fidèle si

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{c}(w)) = \left\{0_{E_w(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}))}\right\}, \forall w \in \mathcal{W}.$$

L'extension de l'action de Clifford $\mathbf{c}$ à $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$ se fait par itération sur $\mathrm{Cl}_n(\mathcal{W})$. Supposons que cette action soit défine sur $\mathrm{Cl}_n(\mathcal{W})$, on la note

$$\mathbf{c}_n : \mathrm{Cl}_n(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}(\zeta)$$

les éléments de $\mathrm{Cl}_{n+1}(\mathcal{W})$ sont des combinaisons linéaires finies de produit fini d'éléments de $\mathrm{Cl}_n(\mathcal{W})$. On pose

$$\mathbf{c}_{n+1} : \mathrm{Cl}_{n+1}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}(\zeta), \ \mathbf{c}_{n+1}(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k) = \mathbf{c}_n(\mathbf{v}_1) \circ \cdots \circ \mathbf{c}_n(\mathbf{v}_k), \ \mathbf{v}_i \in \mathrm{Cl}_n(\mathcal{W})$$

et on prolonge par linéarité. Sous l'hypothèse de continuité normale, on peut construire l'action de Clifford

$$\mathfrak{c} : \mathfrak{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}(\zeta) \tag{4.1}$$

où $\mathfrak{c}$ est l'extension continue de

$$\mathbf{c}_\infty : \mathrm{Cl}_\infty(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}(\zeta), \ \mathbf{c}_\infty |_{\mathrm{Cl}_n(\mathcal{W})} = \mathbf{c}_n$$

à $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$. Inversement pour une action de Clifford $\mathfrak{c}$ à l'infini sur ζ,

$$\mathbf{c} = \mathfrak{c} |_{\mathrm{Cl}(\mathcal{W})} : \mathrm{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}(\zeta)$$

est une action de Clifford sur ζ.

Lemma 5. *Si l'action de Clifford sur ζ est continue son action de Clifford à l'infini est continue. Si cette action est de classe C^p, $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, alors l'action à l'infini est de classe C^p dans le sens de Banach.*

Proof. Une action est de classe C^p si $s \in \Gamma^p(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\mathfrak{s} \in \Gamma^p(\zeta)$ alors $s \cdot \mathfrak{s} \in \Gamma^p(\zeta)$. La limite inductive permet de conclure. □

Notation 1. *On pose $\Gamma(\zeta) = \Gamma^0(\zeta)$ l'espace des sections continues.*

Pour un morphisme de Clifford

$$c : \mathrm{Cl}(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}(\zeta)$$

on peut définir une extension à valeur dans $\mathrm{End}_\infty(\zeta)$, cette extension est définie par itération

$$c_n : \mathrm{Cl}_n(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}_n(\zeta)$$
$$c_n(v) = \iota_{n-1} \circ c_{n-1}(v), \forall v \in \mathrm{Cl}_{n-1}(\mathcal{W})$$

et

$$c_n(vu) = c_n(v) \circ c_n(u) \text{ si } u, v \in \mathrm{Cl}_n(\mathcal{W})$$

où ι_n est défini en 2.1. Par itération, l'extension est définie de $\mathfrak{Cl}_\infty(\mathcal{W})$ à valeurs dans $\mathfrak{End}_\infty(\zeta)$

$$\mathfrak{c}_\infty : \mathfrak{Cl}_\infty(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathfrak{End}_\infty(\zeta) \tag{4.2}$$

par extension continue en norme, si elle existe, de

$$c_\infty : \mathrm{Cl}_\infty(\mathcal{W}) \longrightarrow \mathrm{End}_\infty(\zeta)$$

avec

$$c_\infty\mid_{\mathrm{Cl}_n(\mathcal{W})} = c_n,$$

c_∞ est continue pour la topologie limite inductive mais par en général continue pour les normes.

Definition 4. *Si c_∞ est continue pour la norme on dit que c est normalement continue.*

Il y a deux types d'extention, l'une de $\mathrm{Cl}_\infty(\mathcal{W})$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\zeta)$, l'autre de $\mathrm{Cl}_\infty(\mathcal{W})$ à valeurs dans $\mathrm{End}_\infty(\zeta)$. Si c est normalement continue, on peut définir une extension de $\mathfrak{Cl}_\infty(\mathcal{W})$ à valeurs dans $\mathfrak{End}_\infty(\zeta)$.

5. Fibré spinoriel et opérateur de Dirac

Un J-fibré ζ est un fibré hermitien qui est muni d'un isomorphisme de fibré, antilinéaire

$$J : \zeta \longrightarrow \zeta$$

continu dans le sens suivant, si

$$J \circ s(w) = J(w)(s(w)),$$

alors $J \circ s \in \Gamma(\zeta)$ pour $s \in \Gamma(\zeta)$ et vérifiant

$$J(w)(uz) = J(w)(u)\overline{z},\ J(w)(au) = \chi(a)\,J(w)(u),\ z \in \mathbb{C}$$

$$\langle J(w)(u) \mid J(w)(v)\rangle_{E_w(\zeta)} = \langle u \mid v\rangle_{E_w(\zeta)}.$$

Si on suppose l'existence d'un isomorphisme $\mathbf{J}$ de $\Gamma(\zeta)$, antilinéaire si ζ est complexe

$$\mathbf{J} : \Gamma(\zeta) \longrightarrow \Gamma(\zeta)$$

vérifiant si $s, t \in \Gamma^p(\zeta)$, $a \in \Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}))$ et $\varphi \in C(\mathcal{W})$ alors

$$\mathbf{J}(s\varphi) = \mathbf{J}(s)\overline{\varphi},\ \mathbf{J}(as) = \chi(a)\,\mathbf{J}(s) \tag{5.1}$$

et

$$\langle \mathbf{J}(s) \mid \mathbf{J}(t)\rangle = \langle s \mid t\rangle, \tag{5.2}$$

$\Gamma(\zeta)$ est une $\mathbf{J}$-algèbre.

Remark 3. *Un J-fibré ζ défini une structure de $\mathbf{J}$-algèbre sur $\Gamma(\zeta)$ en posant*

$$\mathbf{J}(s)(w) = J(w)(s(w)),\ w \in \mathcal{W}.$$

Un fibré ζ de base $\mathcal{W}$ pour lequel, $\Gamma(\zeta)$ est une J-algèbre et il existe une action c de Clifford sur ζ qui est continue et irréductible vérifiant

$$\langle u \mid c(w)(a)(v)\rangle_{E_w(\zeta)} = \langle c(w)(a^*)\,u \mid v\rangle_{E_w(\zeta)}$$

pour $a \in E_w(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}))$ et $w \in \mathcal{W}$, c'est-à-dire, $\forall\alpha \in \Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}))$ ou $\Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}, Q))$ et $\forall s, t \in \Gamma(\zeta)$ on a

$$\langle s \mid c(\alpha)(t)\rangle = \left\langle c(\alpha)^\dagger(s) \mid t\right\rangle \tag{5.3}$$

où $c(\alpha)^\dagger = c(\alpha^*)$, on dit que ζ est un fibré spinoriel.

Definition 5. *Une représentation spinorielle, d'une variété $\mathcal{W}$ orientée, est la donnée d'un fibré spinoriel de base $\mathcal{W}$.*

Si $n = +\infty$, la représentation spinorielle est une représentation spinorielle définie sur un fibré d'état. Une structure de spin, sur une variété $\mathcal{W}$ orientée de dimension paire, est la donnée d'un bimodule $\Gamma(\zeta)$ garantissant l'équivalence de Morita entre $C(\mathcal{W})$ et $\Gamma(\mathrm{Cl}(\mathcal{W}))$ et d'un isomorphisme J vérifiant 5.1, 5.2 et 5.3.

On se fixe une connexion ∇ sur un fibré vectoriel ζ complexe

$$\nabla : \Gamma^{\infty}(\zeta) \longrightarrow \Gamma^{\infty}(\zeta) \otimes \Omega^{1}(\mathcal{W})$$

∇ est une application linéaire vérifiant la règle de Leibniz

$$\nabla(s\varphi) = \nabla(s)\varphi + s \otimes d\varphi$$

où $\varphi \in C^{\infty}(\mathcal{W})$, $s \in \Gamma^{\infty}(\zeta)$ et $\Omega^{1}(\mathcal{W})$ est l'espace des 1-formes. Sur une carte de trivialisation W de $\mathcal{W}$ des fibrés ζ et ξ', si $\{s_{\alpha}\}$ et $\{d^{\beta}\}$ sont des sections de bases locales de ζ et ξ' alors

$$\nabla s_{\tau} = \Gamma^{\alpha}_{\tau\beta} s_{\alpha} \otimes d^{\beta},\ \Gamma^{\alpha}_{\tau\beta} \in C^{\infty}(W)$$

si $s = s_{\tau}\varphi^{\tau}$

$$\nabla s = (d + \Gamma) s$$

où

$$ds = s_{\alpha} \otimes d\varphi^{\alpha} \text{ et } \Gamma s = \varphi^{\tau}\Gamma^{\alpha}_{\tau\beta} s_{\alpha} \otimes d^{\beta}.$$

Si $X \in \Gamma(\xi)$ et ∇ est une connexion sur le fibré vectoriel complexe ζ alors on peut étendre la connexion à $\mathrm{Cl}(\zeta)$ en posant

$$\widetilde{\nabla}_X(st) = \widetilde{\nabla}_X(s)\,t + s\widetilde{\nabla}_X(t),\ \forall s,t \in \Gamma^{\infty}(\mathrm{Cl}(\zeta)) \text{ et } \widetilde{\nabla}_X(s) = \nabla_X(s) \text{ si } s \in \Gamma^{\infty}(\zeta).$$

Lemma 6. $\widetilde{\nabla}$ *est une connexion sur le fibré vectoriel* $\mathrm{Cl}(\zeta)$.

Proof. La preuve est dans [1]. □

Par ce procédé d'extension, on peut construire pour chaque $n \in \mathbb{N}$, une connexion notée ∇_n sur $\mathrm{Cl}_n(\zeta)$ par itération

$$\nabla_0 = \nabla,\ \nabla_1 = \widetilde{\nabla},\ \nabla_2 = \widetilde{\nabla}_1,\ \cdots,\ \nabla_{n+1} = \widetilde{\nabla_n},\ \cdots$$

cette suite de connexions permet de construire une connexion à l'infini, notée ∇_{∞}, en posant

$$\nabla_{\infty}|_{\Gamma(\mathrm{Cl}_n(\zeta,Q))} = \nabla_n,\ \nabla_{\infty}\ s = \nabla_n\ s \text{ si } s \in \Gamma(\mathrm{Cl}_n(\zeta)),$$

si on peut étendre cette connexion ∇_{∞} par continuité à $\Gamma^{\infty}(\mathfrak{Cl}(\zeta))$, on la note $\overline{\nabla}_{\infty}$,

$$\overline{\nabla}_{\infty} : \Gamma^{\infty}(\mathfrak{Cl}(\zeta)) \longrightarrow \Gamma^{\infty}(\mathfrak{Cl}(\zeta)) \otimes \Omega^{1}(\mathcal{W}),$$

en particulier, si $\zeta = \xi' \otimes \mathbb{C}$, la connexion est définie sur $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$ par

$$\overline{\nabla}_{\infty} : \Gamma^{\infty}(\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})) \longrightarrow \Gamma^{\infty}(\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})) \otimes \Omega^{1}(\mathcal{W}).$$

Remark 4. *La connexion* $\overline{\nabla}_{\infty}$ *existe si* ∇_{∞} *est bornée pour la norme induite par* $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$ *sur* $\Gamma^{\infty}(\mathfrak{Cl}(\mathcal{W}))$. *On dit, sous cette hypothèse que* ∇ *est une connexion normalisable.*

Si $(\mathcal{W}, \zeta, J)$ est une représentation spinorielle de $\mathcal{W}$, il existe une unique connexion spinorielle sur ζ, notée ∇^{ζ}, vérifiant

$$\left(\nabla^{\zeta}_X s \mid t\right) + \left(s \mid \nabla^{\zeta}_X t\right) = \mathcal{L}_X(s \mid t)$$

commutant avec J,

$$J\nabla^{\zeta}_X = \nabla^{\zeta}_X J$$

et telle que

$$\nabla^{\zeta}\left(c\left(s\right)t\right)=c\left(\widetilde{\nabla}s\right)t+c\left(s\right)\nabla^{\zeta}t.$$

L'action de l'algèbre de Clifford peut s'écrire comme une application

$$\widehat{c}:\Gamma^{\infty}\left(\zeta\right)\otimes\Gamma^{\infty}\left(\mathrm{Cl}\left(\mathcal{W}\right)\right)\longrightarrow\Gamma^{\infty}\left(\zeta\right),\ \widehat{c}\left(s\otimes v\right)=c\left(v\right)\left(s\right),$$

avec cette représentation on a la définition suivante,

Definition 6. *L'opérateur de Dirac $\mathcal{D}$ d'une variété à spin $(\mathcal{W},\zeta,J)$ est l'opérateur de $\Gamma^{\infty}(\zeta)$ défini par*

$$\mathcal{D}_{\zeta}=-i\left(\widehat{c}\circ\nabla^{\zeta}\right).$$

Theorem 4. *Si $\zeta=\xi'\otimes\mathbb{C}$ alors $\mathcal{D}$ est l'opérateur de Dirac de la théorie quantique des champs.*

Proof. Pour une preuve on peut consulter [2]. □

Dans ce qui suit la connexion ∇ est normalisable et l'action de Clifford est normalement continue. Sous ces hypothèses, l'opérateur de Dirac peut s'étendre à l'infini en utilisant la dynamique des foncteurs Cl et End. Les constructions précédentes permettent de définir l'opérateur de Dirac à l'infini en posant

$$\mathfrak{D}_{\zeta}=-i\left(\widehat{\mathfrak{c}}\circ\nabla^{\zeta}_{\infty}\right)$$

où $\mathfrak{c}$ est l'extension de c de $\mathrm{Cl}(\mathcal{W})$ à valeurs dans $\mathrm{End}(\zeta)$ définie en 4.1. Sous les hypothèses précédentes on peut définir un opérateur de Dirac sur $\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)$ par l'extension définie en 4.2 en complétant cette construction par une extension de connexion spinorielle ∇^{ζ} à partir de la connexion de Levi-Civita définie par la pseudo-métrique g définie sur $\mathcal{W}$. Cette extension se fait par récurrence en posant

$$\widetilde{\nabla^{\zeta}}=\nabla^{\zeta'}\otimes\nabla^{\zeta}$$

qui est une connexion définie sur $\mathrm{End}(\zeta)$ et par itération

$$\nabla^{\zeta}_{0}=\nabla^{\zeta},\ \nabla^{\zeta}_{1}=\widetilde{\nabla^{\zeta}}\text{ et }\nabla^{\zeta}_{n+1}=\widetilde{\nabla^{\zeta}_{n}},$$

on pose

$$\nabla^{\zeta}_{\infty}\ s=\nabla^{\zeta}_{n}\ s\text{ si }s\in\Gamma^{\infty}\left(\mathrm{End}_{n}\left(\zeta\right)\right),$$

si la connexion s'étend par continuité à $\Gamma^{\infty}\left(\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)\right)$ on la note $\nabla^{\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)}$, l'opérateur de Dirac sur $\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)$ est donné par

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)}=-i\left(\widehat{\mathfrak{c}_{\infty}}\circ\nabla^{\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)}\right)$$

avec

$$\widehat{\mathfrak{c}_{\infty}}:\Gamma^{\infty}\left(\mathfrak{End}_{\infty}\left(\zeta\right)\right)\otimes\Gamma^{\infty}\left(\mathfrak{Cl}_{\infty}\left(\mathcal{W}\right)\right)\longrightarrow\Gamma^{\infty}\left(\mathfrak{End}_{\infty}\left(\zeta\right)\right),\ \widehat{\mathfrak{c}_{\infty}}\left(s\otimes v\right)=\mathfrak{c}_{\infty}\left(v\right)\left(s\right)$$

où $\mathfrak{c}_{\infty}$ est défini en 4.2. Remarquons que l'on peut construire ces extensions en oubliant la continuité normale, les extensions obtenues sont données sur des fibrés de Fréchet, la continuité est donnée pour la topologie limite inductive.

6. Conclusion

En utilisant la dynamique des foncteurs Cl et End, on peut construire des extension de l'opérateur de Dirac sur des fibrés de dimension infinie. Pour une structure spinorielle sur $\mathcal{W}$, on construit une connexion spinorielle à l'infini sur les fibrés $\mathrm{Cl}_{\infty}(\mathcal{W})$ et $\mathrm{End}_{\infty}(\zeta)$ et extension de l'action de Clifford c_{∞} sur ces fibrés qui soit compatible avec la structure spinorielle, l'extension de Dirac s'écrit

$$\mathfrak{D}_{\mathrm{End}_{\infty}(\zeta)} = -i\left(\widehat{c_{\infty}} \circ \nabla^{\mathrm{End}_{\infty}(\zeta)}\right)$$

si cet opérateur est normalement continue pour les fibrés $\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)$ et $\mathfrak{Cl}(\mathcal{W})$, alors l'extension de l'opérateur de Dirac s'écrit

$$\mathfrak{D}_{\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)} = -i\left(\widehat{\mathfrak{c}_{\infty}} \circ \nabla^{\mathfrak{End}_{\infty}(\zeta)}\right).$$

References

[1] Jonot J.L., "Structure spectrale dans les fibrés d'état". 2022. hal-03680298.
[2] Martinetti P., "Distances en géométrie non commutative". arXiv:math-ph/0112038v1

Email address: j.jonot@gmail.com