$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}$_$X, k, Q$-modules holonomes sur une courbe

Raoul Hallopeau

$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes sur une courbe

Raoul Hallopeau

Abstract

We consider the sheaf of differential operators $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ with a congruence level $k \in \mathbb{N}$, where $\mathfrak{X}$ is a formal smooth quasi-compact scheme over a complete discrete valuation ring $\mathcal{V}$ of mixed characteristic $(0,p)$. We define a category of holonomic $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules using characteristic varieties in the cotangent space T^*X with X the special fiber of $\mathfrak{X}$. In 1995, Laurent Garnier proves in its article [2] that any holonomic $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},0,\mathbb{Q}}$-module has finite length when $\mathfrak{X}$ is a curve. We adapt this result for $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules. We assume that $\mathfrak{X}$ has dimension one and we prove that holonomic $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules are exactly the finite length coherent $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules.

Table des matières

1 Introduction

Soit $\mathcal{V}$ un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte $(0,p)$. On considère un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse $\mathfrak{X}$ localement de type fini dont l'idéal de définition est engendré par une uniformisante ω de $\mathcal{V}$. On définit un faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ de sous-algèbres du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ des opérateurs différentiels cristallins en rajoutant un paramètre $k \in \mathbb{N}$ appelé niveau de congruence. Soit U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ sur lequel on dispose d'un système de coordonnées étales $(x_1, \ldots, x_d)$. Si $\partial_1, \ldots, \partial_d$ sont les dérivations associées, alors

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) = \left\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \ldots \partial_d^{\alpha_d}, \quad a_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \text{ tels que } a_\alpha \cdot \omega^{-k|\alpha|} \underset{|\alpha| \to \infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

Pour $k = 0$, on retrouve $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$. On note $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \operatorname{Frac}(\mathcal{V})$. Pour $k' \geq k$, on a $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k',\mathbb{Q}}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On dispose donc de morphismes de transitions $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k+1,\mathbb{Q}} \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ induis localement par les inclusions.

Rajouter un niveau de congruence k à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ est intéressant pour plusieurs raisons données par exemple dans l'article [4] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch. Les faisceaux $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ apparaissent dans l'étude de représentations localement analytiques de groupes de Lie p-adique. Ils s'avèrent aussi utiles pour regarder des isocristaux surconvergeants dans le cas ramifié. Par ailleurs le faisceau $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$ défini dans l'article [3] toujours de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch est la limite projective des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \operatorname{Frac}(\mathcal{V})$. Avoir une bonne notion de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes pour un niveau de congruence k fixé est un bon début dans le but de définir une bonne catégorie de $\mathcal{D}_{\mathfrak{X},\infty}$-modules holonomes.

Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module à gauche cohérent. On définit sa variété caractéristique $\operatorname{Car} \mathcal{E}$ comme il suit en généralisant la construction de Berthelot pour un niveau de congruence k. On note κ le corps résiduel de $\mathcal{V}$ et $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \operatorname{Spec} \kappa$ la fibre spéciale de X. La réduction $E = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ modulo ω de $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent, où $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est un faisceau sur X. Les opérateurs différentiels de $\mathcal{D}_{X,k}$ étant finis, on munit $\mathcal{D}_{X,k}$ de la filtration donnée par l'ordre des opérateurs différentiels. On construit classiquement la variété caractéristique de E comme une sous-variété fermée du fibré cotangent T^*X de X. La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ est par définition celle de E.

Lorsque X est une variété complexe lisse, la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_X$-module cohérent M non nul est une sous variété involutive du fibré cotangent T^*X. La preuve de ce résultat repose sur la caractéristique nulle de $\mathbb{C}$. En particulier une composante irréductible de $\operatorname{Car} M$ a une dimension supérieure à celle de X. Le module M est appelé holonome si $\dim \operatorname{Car} M = \dim X$. La minimalité des dimensions des composantes irréductibles de $\operatorname{Car} M$ implique que M est de longueur finie.

De manière analogue, un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent dont la variété caractéristique est de dimension inférieure à la dimension de $\mathfrak{X}$ est appelé holonome. Cependant les résultats précédents ne s'appliquent plus puisque la caractéristique de κ est positive (la fibre spéciale X de $\mathfrak{X}$ est un κ-schéma). Le fait que ces modules soient de longueur finie n'est pas connu en général.

Laurent Garnier dans [2] a démontré que les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$-modules holonomes sont de longueur finie lorsque $\mathfrak{X}$ est une courbe. On généralise dans cet article ce résultat à un niveau de congruence quelconque $k \in \mathbb{N}$. On adapte les constructions et les preuves de Laurent Garnier pour les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

On suppose donc que $\mathfrak{X}$ est une courbe. On commence, en partie 2, par quelques rappels sur les faisceaux $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. On munit $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$, pour un ouvert affine U doté d'une coordonnée étale, d'une norme multiplicative complète. On donne ensuite un critère concret d'inversibilité d'un opérateur P de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On en déduit que l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est simple.

Dans la section 3, on étudie les variétés caractéristiques des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents. On donne tout d'abord quelques rappels sur la variété caractéristique dans la partie 3.1. Tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ admet un modèle entier. Il s'agit d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent $\mathring{\mathcal{E}}$ sans ω-torsion tel que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \otimes_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}} \mathring{\mathcal{E}} \simeq \mathcal{E}$. On définie alors $\operatorname{Car}\mathcal{E}$ comme étant $\operatorname{Car}\mathring{\mathcal{E}}$. Cette construction est indépendante du choix du modèle entier. La variété $\operatorname{Car}\mathcal{E}$ est un sous-schéma fermé du fibré cotangent T^*X de la fibre spéciale X de $\mathfrak{X}$. On dit que $\mathcal{E}$ est holonome si $\dim \operatorname{Car}\mathcal{E} \leq \dim X = 1$.

On prouve en 3.2 que l'on peut se ramener à regarder les variétés caractéristiques des quotients $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k} = \mathcal{D}_{X,k} \otimes_\kappa \mathcal{O}_{X,x}$. En effet pour tout point x de $\mathfrak{X}$ et pour tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent $\mathcal{E}$, on dispose d'un isomorphisme naturel

$$\operatorname{Car}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq \operatorname{Car}(\mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)$$

Si $I = 0$, alors $\operatorname{Car}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I) = \operatorname{Spec}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})$. Lorsque $I \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$, $\operatorname{Car}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I) = \emptyset$. Sinon la variété caractéristique de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I$ est donnée par l'une des équations

$$\operatorname{Car}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I) = \begin{cases} t \cdot \xi_k = 0 \\ \xi_k = 0 \\ t = 0 \\ t = 0 \quad \text{et} \quad \xi_k = 0 \end{cases} \tag{1}$$

où (t, ξ_k) est le sytème de cordonnées sur $\operatorname{Spec}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})$ induit par une coordonnée étale sur U associée au point x.

On démontre ensuite dans la section 3.3 l'inégalité de Bernstein : les composantes irréductibles de la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent non nul sont de dimension au moins un. Ce résultat n'est pas vrai au niveau de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$ car la quatrième équation de 1 est un point.

On prouve enfin dans la partie 3.4 que tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome est de longueur finie. Puisque $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est simple de longueur infinie, on déduit d'un théorème de Stafford que tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module de longueur finie est monogène. Cela permet de donner la caractérisation suivante des modules holonomes :

Proposition 1.1. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. Les énoncés suivants sont équivalents :*

1. *$\mathcal{E}$ est holonome.*
2. *$\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.*
3. *$\mathcal{E}$ est de longueur finie.*
4. *$\mathcal{E}$ est de torsion.*

Notations

- $\mathcal{V}$ est un anneau complet de valuation discrète de caractéristique mixte $(0,p)$, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et de corps résiduel κ supposé parfait. On note $|\cdot|$ la valeur absolue normalisée de $\mathcal{V}$, ω une uniformisante et $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{V})$ son corps des fractions.
- X est une courbe sur κ lisse connexe quasi-compacte et $x \in X$ est un point donné.
- $\mathfrak{X}$ est un $\mathcal{V}$-schéma formel lisse localement de type fini relevant X d'idéal de définition engendré par l'uniformisante ω.
- $\mathfrak{X}_K$ est l'espace analytique rigide associé à $\mathfrak{X}$.
- t est un relèvement local sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$ d'une uniformisante en x ($\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète puisque X est une courbe). Alors $\mathrm{d}t$ est une une base de $\Omega^1_{\mathfrak{X},x}$. On note ∂ la dérivation associée.
- U est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales (t,∂).
- Soit $f \in \Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}})\backslash\{0\}$ et r tel que $f_1 := \omega^r f \in \Gamma(U,\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})\backslash\Gamma(U,\mathfrak{m}\cdot\mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$. On note $U_{\{f\}} \subset U$ l'ouvert sur lequel f_1 est inversible. On remarquera que $U_{\{f\}} \cup \{x\} = U\backslash\{V(\bar{f}_1) - \{x\}\}$ (où $\bar{f}_1$ est la réduction de f_1 modulo $\mathfrak{m}$) est un ouvert puisque $\bar{f}_1$ n'a qu'un nombre fini de zéros.
- Sauf mention contraire, les idéaux et les modules considérés seront tous à gauche.

2 Propriétés du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$

On adapte dans cette section la seconde partie de l'article [2] de Laurent Garnier à un indice de congruence $k \geq 0$. On munit l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ d'une norme complète multiplicative. On montre ensuite la simplicité de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On termine par quelques rappels et quelques propriétés sur les bases de division d'un idéal cohérent de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ en 2.3.

2.1 Rappels sur la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$

On redonne ici la définition d'une algèbre affinoïde et de sa norme spectrale. Puis on rappelle quelques résultats utiles de la première partie de l'article [2] de Garnier. On pourra s'y référer pour la preuve des lemmes énoncés.

On note $T_n(\mathcal{V}) = \mathcal{V}\langle T_1, \ldots, T_n\rangle$ l'algèbre de Tate sur $\mathcal{V}$ à n-variables :

$$T_n(\mathcal{V}) = \left\{ f(T) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha \cdot T^\alpha, \quad |c_\alpha| \underset{|\alpha| \to \infty}{\to} 0 \right\}$$

où $T^\alpha = T_1^{\alpha_1} \ldots T_n^{\alpha_n}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. On munit $T_n(\mathcal{V})$ de la norme de Gauss définie par $|f| = \max\{|c_\alpha|\}$. C'est une valuation et $T_n(\mathcal{V})$ est le complété de $\mathcal{V}[T_1, \ldots, T_n]$ pour cette valuation. En particulier $T_n(\mathcal{V})$ est une $\mathcal{V}$-algèbre de Banach. Elle est de plus noetherienne et tout idéal I est complet. Le quotient $T_n(\mathcal{V})/I$ de $T_n(\mathcal{V})$ est donc une $\mathcal{V}$-algèbre de Banach pour la topologie induite par le passage au quotient.

L'algèbre de Tate $T_n(\mathcal{V})$ est l'ensemble des série entières en T à coefficients dans $\mathcal{V}$ qui convergent sur la boule unité fermée de K^n. On peut aussi munir $T_n(\mathcal{V})$ de la norme supérieure. Elle coïncide avec la norme de Gauss. Cela provient du principe du maximum vérifié par $T_n(\mathcal{V})$: il existe $y \in \mathcal{V}^n$ tel que $|f| = |f(y)|$.

Une $\mathcal{V}$-algèbre affinoïde A est par définition une $\mathcal{V}$-algèbre de Banach isomorphe (en tant qu'algèbre topologique) à un quotient $T_n(\mathcal{V})/I$ de $T_n(\mathcal{V})$ par un idéal I. Toutes les normes sur A induites par une présentation de A comme quotient d'une algèbre de Tate sont équivalentes.

Si z est un idéal maximal de $A_K = A \otimes_{\mathcal{V}} K$, alors A_K/z est une extension finie de K. La valeur absolue de K s'étend uniquement en une valeur absolue sur A_K/z notée encore $|\cdot|$. On définit la norme spectrale d'un élément $f \in A_K$ de la manière suivante. On note $f(z)$ l'image de f dans A_K/z et $|f(z)|$ sa valeur absolue. Alors

$$\|f\|_{\mathrm{sp}} = \max_{z \in \operatorname{Spm} A_K} |f(z)|$$

En général $\|\cdot\|_{\mathrm{sp}}$ est seulement une semi-norme inférieure à toute norme de Gauss induite. Cependant lorsque A_K est intègre, c'est une valeur absolue ultramétrique équivalente aux normes de Gauss. C'est le cas par exemple pour $A = T_n(\mathcal{V})$.

Tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ est le spectre formel d'une $\mathcal{V}$-algèbre affinoïde $A : U = \operatorname{Spf} A$. De plus $U_K = \operatorname{Spm} A_K$, où $A_K = A \otimes_{\mathcal{V}} K$ une K-algèbre affinoïde (ie un quotient de $T_n(K)$). Puisque $\mathfrak{X}$ est connexe et lisse, U est intègre. La norme spectrale $\|\cdot\|_{\mathrm{sp}}$ est donc une valuation complète sur l'algèbre affinoïde définissant U_K.

On suppose pour la fin de cette partie que x est un point κ-rationnel de X. Pour $0 \leq \lambda < 1$, on note $V_\lambda = \{y \in U_K : |t(y)| \geq \lambda\}$. C'est un ouvert de $\mathfrak{X}_K$ contenu dans U_K. Puisque U est affine, V_λ est affinoide et ne dépend pas du choix de t pour tout λ vérifiant $|\lambda| > |\omega| = \frac{1}{p}$. Puisque X est lisse en x, on dispose d'un isomorphisme permettant d'identifier le tube $]x[$ à un disque ouvert :

$$]x[\xrightarrow{\sim} D(0, 1^-) := \{y \in \widehat{\mathbb{A}}_K^{1,\mathrm{an}} : 0 \leq |t(y)| < 1\}$$

Soit $f \in \Gamma(U_K \cap V_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ une section non nulle. Alors $f_{|]x[\cap V_{\lambda_0}}$ s'écrit uniquement en une série $\sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \cdot t^i$, où les α_i sont des éléments de K. Cette fonction converge sur la couronne $C([\lambda_0, 1[) = \{y \in \widehat{\mathbb{A}}_K^{1,\mathrm{an}} : \lambda_0 \leq |t(y)| < 1\}$. Pour tout $\lambda_0 \leq \lambda < 1$, on note

$$N(f_{|]x[\cap V_\lambda}, \lambda) = \max \left\{ i \in \mathbb{N} : |\alpha_i|\lambda^i = \sup_{j\in\mathbb{N}} |\alpha_i|\lambda^i \right\} \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

On pose

$$N(f) = \lim_{\lambda\to 1^-} N(f_{|]x[\cap V_\lambda}, \lambda) \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

Lemme 2.1. *Pour toute section $f \in \Gamma(U_K \cap V_{\lambda_0}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ non nulle, $N(f)$ est un entier positif ne dépendant pas du choix de t. De plus si $f_{|]x[\cap V_{\lambda_0}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \cdot t^i$, alors $N(f)$ est le plus petit indice tel que $\|f\|_{\mathrm{sp}} = |\alpha_{N(f)}| = \max_{j\geq 0} |\alpha_j|$. En particulier $\|f\|_{\mathrm{sp}}$ est dans $|K|$.*

Remarque 2.2.

1. *Si $N(f) = 0$, alors f n'a pas de zéro sur $]x[$ et $x \in U_{\{f\}}$.*
2. *On a $N(0, \lambda) = N(0) = +\infty$.*

On rappelle que $\mathcal{O}_{X,x}$ est anneau de valuation discrète, de corps résiduel κ lorsque x est un point κ-rationnel. Par définition t en est une uniformisante. On considère la valuation de $\mathcal{O}_{X,x}$ donnée par $v(t) = 1$.

Lemme 2.3. *Soit $f \in \Gamma(U_K \cap V_\lambda, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}_K})$ une section telle que $\|f\|_{\mathrm{sp}} = 1$. Alors $N(f)$ est la valuation de $(f \mod \omega)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$.*

On écrit $f_{|]x[\cap V_{\lambda_0}} = \sum_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i \cdot t^i$, toujours avec l'hypothèse que $\|f\|_{\mathrm{sp}} = 1$. Autrement dit les α_i sont dans $\mathcal{V}$. Alors $(f_{|]x[\cap V_{\lambda_0}} \mod \omega) = \sum_{0\leq i<\infty} \bar{\alpha}_i \cdot t^i$ et $N(f)$ est le plus petit entier n tel que $\bar{\alpha}_n \neq 0$.

Lorsque U est un ouvert affine de $\mathfrak{X}$, on note la norme spectrale de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ simplement par $|\cdot|$. On rappelle qu'elle est équivalente à toute norme de Gauss induite sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et que c'est une valuation.

2.2 Quelques propriétés de l'algèbre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$

Le faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$

On commence par rappeler brièvement la définition du faisceau $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ des opérateurs différentiels sur lequel on travaille. On pourra voir la seconde partie de l'article [3] de Christine Huyghe, Tobias Schmidt et Matthias Strauch pour plus de détails. On désigne toujours par U un ouvert affine contenant x sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales (t, ∂).

Le faisceau $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ est défini comme un sous-faisceau de $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$ dépendant d'un paramètre $k \in \mathbb{N}$ appelé niveau de congruence. Le cas $k = 0$ donne $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X}}$. Localement, $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ est la $\mathcal{V}$-algèbre engendrée par $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)$ et par la dérivation $\omega^k\partial$. Plus précisément

$$\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) = \left\{ \sum_{0\leq n<\infty} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U) \right\}$$

On peut aussi voir $\mathcal{D}^{(0)}_{U,k}$ comme le $\mathcal{O}_U$-module libre de base les puissances de $\omega^k\partial$:

$$\mathcal{D}^{(0)}_{U,k} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_U \cdot (\omega^k\partial)^n$$

On note $\mathcal{D}_{X,k}$ la réduction modulo ω de $\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. C'est le faisceau de κ-algèbres sur la fibre spéciale $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \operatorname{Spec} \kappa$ de $\mathfrak{X}$ engendré localement sur U par $\mathcal{O}_{X|U}$ et par la dérivation ∂_k image de $\omega^k\partial$ après réduction modulo ω. On rappelle que $\mathfrak{X}$ et X ont même espace topologique. On voit ici U comme un ouvert affine de X.

Soit $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} = \varprojlim_i \left(\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\omega^{i+1}\mathcal{D}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}\right)$ le complété ω-adique de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} K$. On dispose de la description locale suivante :

$$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U) = \left\{ \sum_{0\leq n\leq\infty} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n, \quad a_n \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U), \quad |a_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right\}$$

Toutes ces algèbres sont noetheriennes et tous ces faisceaux sont cohérents. Pour $k' > k$, il est clair que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k'}(U) \subset \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. En particulier les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ sont des sous-algèbres de l'algèbre des opérateurs différentiels $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X}}(U) = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},0}(U)$.

Structure d'algèbre de Banach sur $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$

On munit maintenant $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ d'une norme multiplicative complète $\|\cdot\|_k$. Dans un premier temps on suppose encore que $x \in X$ est un point κ-rationnel.

Définition 2.4. *Soit $H = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On pose*

1. $\|H\|_k = \max_{n\geq 0}\{|a_n|\}$;
2. $\overline{\mathrm{N}}_k(H) = \max\{n \in \mathbb{N} : |a_n| = \|H\|_k\}$;
3. $\mathrm{N}_k(H) = N(a_{\overline{\mathrm{N}}_k(H)})$.

On rappelle que si $\sum_{i\geq 0}\alpha_i\cdot t^i$ est l'écriture comme série de $a_{\overline{N}_k(H)}$ sur $]x[\cap U_K$, alors $\|H\|_k=|\alpha_{N_k(H)}|$.

Soit H un opérateur non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On choisit $\alpha\in K$ tel que $|\alpha|=(\max_{n\geq 0}|a_n|)^{-1}$. Il s'agit bien d'un élément de $|K|^\times$ d'après le lemme 2.1. Alors αH est de norme 1 et αH appartient à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. L'entier $\overline{N}_k(H)$ est le plus grand indice n tel que $|\alpha\cdot a_n|=\|\alpha H\|_k=1$. En particulier $\overline{N}_k(H)$ est l'ordre de $(\alpha H \mod \omega)$ dans $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ et ne dépend pas du choix de α. De plus d'après le lemme 2.3, $N_k(H)=N_k(\alpha H)$ est la valuation de $\alpha\cdot a_{\overline{N}_k(H)}$ modulo ω dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Ce nombre ne dépend pas non plus de α.

Ainsi $\overline{N}_k(H)$ et $N_k(H)$ coincident respectivement avec l'ordre et la valuation de $(\alpha H \mod \omega)\in\mathcal{D}_{X,k}(U)$ pour tout élément α de K vérifiant $\|\alpha H\|_k=1$. Par ailleurs ces définitions sont indépendantes du choix des coordonnées locales sur U :

Lemme 2.5. *La norme $\|\cdot\|_k$ et les fonctions $\overline{N}_k$ et N_k ne dépendent pas du choix du système de coordonnées locales.*

Démonstration. Soit (t',∂') un autre système de coordonnées locales sur l'ouvert U. Puisque ∂' est un générateur du faisceau tangent $\mathcal{O}_U\cdot\partial$, il existe $\alpha\in\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(U)^\times$ tel que $\partial'=\alpha\cdot\partial$. On a $|\alpha|=1$ (puisque $|\alpha|\leq 1$ et α est inversible). Soit $P=\sum_{n\geq 0}a_n\cdot(\omega^k\partial')^n$ un élément de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Sa norme $\|P\|_k$ pour le système de coordonnées locales (t',∂') est le maximum des normes spectrales des a_n.

Par ailleurs $P=\sum_{n\geq 0}a_n\cdot(\alpha\omega^k\partial)^n$. On a $(\alpha\partial)^2=\alpha^2\partial^2+\alpha\partial(\alpha)\partial$. Or $|\partial^n(\alpha)|\leq|\alpha|=1$, donc le coefficient de ∂ a une norme spectrale inférieure à un. Une récurrence montre que

$$(\alpha\partial)^n=\alpha^n\partial^n+\sum_{m=0}^{n-1}b_m\partial^m$$

avec $|b_m|\leq 1$ pour tout m. Il vient

$$\begin{aligned}
P&=\sum_{n\geq 0}a_n\left[\alpha^n(\omega^k\partial)^n+\omega^{kn}\sum_{m=0}^{n-1}b_m\right]\\
&=\sum_{n\geq 0}a_n\alpha^n(\omega^k\partial)^n+\underbrace{\sum_{n\geq 1}a_n\omega^k\sum_{m=0}^{n-1}\omega^{k(n-m+1)}b_m(\omega^k\partial)^m}_{\sum_{n\geq 0}\beta_n(\omega^k\partial)^n}
\end{aligned}$$

avec $|\beta_n|\leq|\omega|^k\cdot\|P\|_k$ et $|a_n\alpha^n|=|a_n|$. Lorsque $k>0$, $|\beta_n|<\|P\|_k$ et il est clair que la norme de P pour le système de coordonnées locales (t,∂) est aussi donnée par le maximum $\max_{n\in\mathbb{N}}|a_n|$. Pour $k=0$, le résultat reste vrai. En effet dans la seconde somme, le coefficient de $(\omega^k\partial)^n$ est une combinaison des a_k pour $k>n$ et des b_m. $\square$

La norme $\|P\|_k$ et l'entier $\overline{N}_k(P)$ ne dépendent donc que de l'opérateur P, indépendamment du point x. Tandis que par définition $N_k(P)$ est une notion locale en x : c'est la valuation du coefficient dominant de $(P \mod \omega)$ dans $\mathcal{O}_{X,x}$.

Proposition 2.6.

1. *$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$ et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ sont complets pour la norme $\|\cdot\|_k$.*
2. *La norme induite sur tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent est complète.*
3. *Pour tout $H, Q \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$, on a*

$$\|HQ\|_k = \|H\|_k \cdot \|Q\|_k$$

$$\overline{N}_k(HQ) = \overline{N}_k(H) + \overline{N}_k(Q)$$

$$N_k(HQ) = N_k(H) + N_k(Q)$$

Démonstration. Le premier point découle du fait que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est complet pour la topologie ω-adique et que la norme spectrale est équivalente à la topologique ω-adique sur $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)$. On munit tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ de la norme induite par des présentations locales de $\mathcal{E}$. Elle est complète et ne dépend pas des présentations choisies puisque la norme $\|\cdot\|_k$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est multiplicative par 3 (sous-multiplicative suffit). Cela montre le second point.

Soit maintenant $H = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ et $Q = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot (\omega^k\partial)^n$ deux éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. On a

$$\begin{aligned} HQ &= \sum_{i\geq 0} a_i \cdot (\omega^k\partial)^i \left(\sum_{j\geq 0} b_j \cdot (\omega^k\partial)^j\right) \\ &= \sum_{i,j\geq 0} \left(\sum_{\ell=0}^{i} \binom{i}{\ell} \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j) \cdot \omega^{k(i+j-\ell)} \cdot \partial^{i+j-\ell}\right) \\ &= \sum_{u\geq 0} \underbrace{\sum_{\substack{\ell\geq 0 \\ 0\leq j\leq u}} \left(\binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot a_{u+\ell-j} \cdot \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j)\right)}_{\alpha_u \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U)} (\omega^k\partial)^u \end{aligned}$$

On remarque déjà que

$$\left|\binom{u+\ell-j}{\ell} \cdot a_{u+\ell-j} \cdot \omega^{k\ell} \cdot \partial^\ell(b_j)\right| \leq |a_{u+\ell-j}| \cdot |\partial^\ell(b_j)| \leq |a_{u+\ell-j}| \cdot |b_j| \leq \|H\|_k \cdot \|Q\|_k$$

Ainsi $\|HQ\|_k \leq \|H\|_k \cdot \|Q\|_k$. Pour $u = \overline{N}_k(H) + \overline{N}_k(Q)$, $\ell = 0$ et $j = \overline{N}_k(Q)$, le coefficient associé dans la somme définissant α_u est $a_{\overline{N}_k(H)} \cdot b_{\overline{N}_k(Q)}$. En particulier ce terme est de norme $\|H\|_k \cdot \|Q\|_k$. Si $j \geq \overline{N}_k(Q)$, alors $|b_j| < \|Q\|_k$. Si $j < \overline{N}_k(Q)$ ou si $j \leq \overline{N}_k(Q)$ et $\ell \geq 1$, alors $u+\ell-j > \overline{N}_k(P)$. Donc $|a_{u+\ell-j}| < \|P\|_k$. Dans tous ces cas, la norme du terme associé dans α_u est strictement inférieure à $\|H\|_k \cdot \|Q\|_k$. Ceci prouve que $|\alpha_u| = \|H\|_k \cdot \|Q\|_k$. Autrement dit $\|HQ\|_k = \|H\|_k \cdot \|Q\|_k$.

Si $u > \overline{N}_k(H) + \overline{N}_k(Q)$, on montre de manière analogue que $|\alpha_u| < \|H\|_k \cdot \|Q\|_k$. Ainsi $\overline{N}_k(HQ) = \overline{N}_k(H) + \overline{N}_k(Q)$. On peut supposer H et Q de norme un. Dans ce cas $N_k(H) = v(a_{\overline{N}_k(H)} \mod \omega) =$ et $N_k(Q) = v(b_{\overline{N}_k(Q)} \mod \omega)$, où v est la valuation de $\mathcal{O}_{X,x}$. Puisque $\alpha_{\overline{N}_k(H)+\overline{N}_k(Q)} = a_{\overline{N}_k(H)} \times b_{\overline{N}_k(Q)} +$ (un terme de norme spectrale strictement inférieure), on a bien

$$\begin{aligned} N_k(HQ) &= v(a_{\overline{N}_k(H)} \cdot b_{\overline{N}_k(Q)} \mod \omega) = v(a_{\overline{N}_k(H)} \mod \omega) + v(b_{\overline{N}_k(Q)} \mod \omega) \\ &= N_k(H) + N_k(Q) \end{aligned}$$

□

Applications

On énonce dans cette partie quelques propriétés de cette algèbre de Banach. Les preuves sont adaptées de celles de Laurent Garnier à un niveau de congruence k. La proposition suivante caractérise l'inversibilité des éléments de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ à l'aide des fonctions $\overline{N}_k$ et N_k.

Proposition 2.7. *On suppose que x est un point κ-rationnel. Soit $H \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. Il existe un ouvert V de U contenant x sur lequel H est inversible si et seulement si $\overline{N}_k(H) = N_k(H) = 0$. Si de plus $\|H\|_k = 1$, alors $H^{-1} \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$.*

Démonstration. Si H est inversible d'inverse H^{-1} , alors $\overline{N}_k(H) + \overline{N}_k(H^{-1}) = \overline{N}_k(1) = 0$. Donc $\overline{N}_k(H) = 0$ puisque $\overline{N}_k(H)$ est un entier positif. De même $N_k(H) = 0$. Réciproquement on suppose $\overline{N}_k(H) = N_k(H) = 0$. On écrit $H = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n$. Ces deux conditions signifient que $|a_0| > |a_n|$ pour tout $n > 0$ et que a_0 n'a pas de zéro sur $]x[$. Autrement dit a_0 est inversible sur l'ouvert $V = U_{\{a_0\}} \cup \{x\}$ de U. Sur cet ouvert, l'inverse de H est donné par la série classique

$$H^{-1} = \sum_{i\geq 0} \left(- \sum_{j\geq 1} \frac{a_j}{a_0} (\omega^k \partial)^j \right)^i a_0^{-1}$$

Cet opérateur converge puisque

$$\left\| \sum_{j\geq 1} \frac{a_j}{a_0} (\omega \partial)^j \right\|_k = \max_{j\geq 1} \left\{ \left| \frac{a_j}{a_0} \right| \right\} < 1$$

Ainsi H^{-1} définit bien un élément de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. Si maintenant H est de norme un, alors les a_n et a_0^{-1} sont des éléments de $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}(V)$. Il en découle que $H^{-1} \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(V)$. □

On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K. A partir de maintenant, et pour le reste de l'article, x n'est plus supposé κ-rationnel. C'est un point κ'-rationnel pour une certaine extension finie κ' de κ. On note K' l'extension finie de K dans $\overline{K}$ dont le corps résiduel est κ'. Quitte à étendre K par K', on peut définir les fonctions $\overline{N}_k$ et N_k des opérateurs de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ en x.

Puisque l'extension K'/K est finie, $K\langle T_1, \ldots, T_n\rangle \otimes_K K'$ est complet. Ainsi la K'-algèbre de Tate $T_n(K')$ coïncide avec $T_n(K) \otimes_K K'$. On munit K' de l'extension non normalisée de la valeur absolue de K, notée encore $|\cdot|$. Le morphisme canonique $T_n(K) \to T_n(K')$ est une isométrie de K-algèbres pour les normes de Gauss, égales aux normes spectrales. Plus généralement si A est une K-algèbre affinoïde, alors $A' = A \otimes_K K'$ est une K'-algèbre affinoïde. Le morphisme canonique $A \to A'$ est une isométrie de K-algèbres affinoïdes. Lorsque A est intègre, la norme spectrale est une norme sur A et et le morphisme précédent est une isométrie pour les normes spectrales.

On munit $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \otimes_K K'$ de la norme de K'-algèbre $\|P \otimes \lambda\|'_k = |\lambda| \cdot \|P\|_k$. Comme le morphisme canonique $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \to \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(U) \otimes_K K'$ est une K-isométrie, le morphisme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \to \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \otimes_K K'$ est une isométrie de K-algèbres. Soit $H \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$. La fonction $\overline{N}_k(H)$ ne dépend donc pas de l'extension K' de K mais seulement de H : cet entier est le même aussi bien dans $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U), \|\cdot\|_k)$ que dans $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \otimes_K K', \|\cdot\|'_k)$.

Corollaire 2.8. *Un opérateur différentiel $H \in \Gamma(U, \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}})$ est inversible au voisinage de x si et seulement si $\overline{N}_k(H) = N_k(H) = 0$.*

Démonstration. La proposition 2.7 montre que H est inversible au voisinage de x après extension des scalaires de K à K'. Soit $V \subset U$ un ouvert contenant x sur lequel H est inversible. On écrit $H = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (\omega^k \partial)^n \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. Puisque a_0 est inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V) \otimes_K K'$ et $a_0 \in \mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$, il inversible dans $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\mathbb{Q}}(V)$. Alors l'inverse $H^{-1} = \sum_{i \geq 0} \left(- \sum_{j \geq 1} \frac{a_j}{a_0} (\omega^k \partial)^j \right)^i a_0^{-1}$ de H dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V) \otimes_K K'$ appartient à $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. □

Ce critère d'inversibilité permet de démontrer que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est simple :

Proposition 2.9. *Pour tout ouvert affine V de $\mathfrak{X}$, $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ est une algèbre simple.*

Démonstration. Soit I un idéal bilatère non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$ et $x \in V$ un point fermé. On va montrer qu'il existe un voisinage ouvert affine W de x dans V tel que $I_{|W}$ contienne un élément inversible dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(W)$. Les points fermés étant denses dans V, ceci implique que $I = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(V)$. D'après le corollaire 2.8, il suffit de montrer que quitte à réduire V, I contient un élément P vérifiant $\overline{N}_k(P) = N_k(P) = 0$. On peut remplacer K par une extension finie afin que x soit rationnel et supposer que V est affine.

On part d'un opérateur non nul $H = \sum_{i\geq 0} a_i \cdot (\omega^k\partial)^i$ de I. Comme I est un idéal bilatère, les crochets $[H,t] = Ht - tH$ et $[H,t]^{n+1} := [[H,t]^n, t]$ pour $n \in \mathbb{N}$ restent des éléments de I. On a $[H,t] = \omega^k \cdot \sum_{i\geq 1} ia_i \cdot (\omega^k\partial)^{i-1}$ et

$$[H,t]^{\overline{N}_k(H)} = (\omega^{k\overline{N}_k(H)} \cdot \overline{N}_k(H)!) \sum_{i\geq \overline{N}_k(H)} \binom{i}{\overline{N}_k(H)} \cdot a_i \cdot (\omega^k\partial)^{i-\overline{N}_k(H)}$$

Pour tout $i > \overline{N}_k(H)$, on a

$$\left|\binom{i}{\overline{N}_k(H)} a_i\right| \leq |a_i| < |a_{\overline{N}_k(H)}|$$

Autrement dit $\overline{N}_k([H,t]^{\overline{N}_k(H)}) = 0$. Ainsi quitte à remplacer H par $[H,t]^{\overline{N}_k(H)}$, on peut supposer que $\overline{N}_k(H) = 0$. Par ailleurs $\omega^k \cdot \partial \cdot a_i \cdot (\omega^k\partial)^i = \omega^k \cdot \partial(a_i) \cdot (\omega^k\partial)^i + a_i \cdot (\omega^k \cdot \partial)^{i+1}$ et donc

$$\begin{aligned}
[H, \omega^k\partial] = H\omega^k\partial - \omega^k\partial H &= \sum_{i\geq 0} \left(a_i \cdot (\omega^k\partial)^{i+1} - \omega^k\partial \cdot a_i \cdot (\omega^k\partial)^i\right) \\
&= -\omega^k \sum_{i\geq 0} \partial(a_i) \cdot (\omega^k\partial)^i
\end{aligned}$$

Ainsi $[H,\omega^k\partial]^{N_k(H)} = (-\omega^k)^{N_k(H)} \sum_{i\geq 0} \partial^{N_k(H)}(a_i) \cdot (\omega^k\partial)^i$. Puisque $\overline{N}_k(H) = 0$, on a :

$$\forall i \geq 1, \quad |\partial^{N_k(H)}(a_i)| \leq |N_k(H)!| \cdot |a_i| < |N_k(H)!| \cdot \|H\|_k$$

Sur $]x[\cap U_K$ on peut écrire $a_0 = \sum_{i\geq 0} \alpha_i \cdot t^i$, $\alpha_i \in K$. On a

$$\partial^{N_k(H)}(a_0) = N_k(H)! \sum_{i\geq N_k(H)} \binom{i}{N_k(H)} \cdot \alpha_i \cdot t^{i-N_k(H)}$$

Comme $N_k(H) = N(a_0)$, on a

$$\forall i > N_k(H), \quad \left|\binom{i}{N_k(H)} \alpha_i\right| \leq |\alpha_i| < |\alpha_{N_k(H)}| = |\alpha_{N(a_0)}| = \|H\|_k$$

Ainsi $|\partial^{N_k(H)}(a_0)| = |N_k(H)!| \cdot |\alpha_0| = |N_k(H)!| \cdot \|H\|_k$ et $N_k(\partial^{N_k(H)}(a_0)) = 0$. Ceci montre que $[H,\omega^k\partial]^{N_k(H)}$ est un élément de I de fonctions $\overline{N}_k$ et N_k nulles. Quitte à réduire l'ouvert V contenant x, il est inversible. $\square$

2.3 Base de division d'un idéal de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$

On termine cette section par rappeler ce qu'est une base de division d'un idéal cohérent non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Une telle base permettra de calculer la variété caractéristique du $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$.

On commence par définir la notion de base de division en x au niveau de la fibre spéciale X de $\mathfrak{X}$. Soit U un ouvert affine contenant x admettant une coordonnée locale associée à x. On pose $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k} = \mathcal{D}_{X,k}(U) \otimes_\kappa \mathcal{O}_{X,x}$. En tant que κ-algèbre, $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$ est isomorphe à $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{X,x} \cdot \partial_k^n$ où ∂_k est l'image de $\omega^k\partial$ après réduction modulo ω. Il s'agit de l'algèbre des opérateurs différentiels en ∂_k à coefficients dans $\mathcal{O}_{X,x}$. On note dans la suite l'agèbre $\mathcal{D}_{X,k}(U) \otimes_\kappa \mathcal{O}_{X,x}$ simplement par $\mathcal{D}_{X,k} \otimes_\kappa \mathcal{O}_{X,x}$ puisqu'elle ne dépend pas du choix de U.

On rappelle que $\mathcal{O}_{X,x}$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante t. Les notions de base de division en x vont coïncider entre un idéal de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ et sa réduction modulo ω dans $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$.

Soit $P = \alpha_d \cdot \partial_k^d + \cdots + \alpha_1 \cdot \partial_k + \alpha_0$ un opérateur d'ordre $d = d(P)$ de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$. On appelle valuation de P celle de son coefficient dominant : $v(P) = v(\alpha_d)$. *L'exposant* $\mathrm{Exp}(P)$ de P est le couple $(v(P), d(P))$. Si Q est un autre opérateur de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$, on vérifie que $\mathrm{Exp}(PQ) = \mathrm{Exp}(P) + \mathrm{Exp}(Q)$.

Soit I un idéal à gauche non nul de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$. On définit son *exposant* par

$$\mathrm{Exp}(I) = \{(v(P), d(P)), P \in I\backslash\{0\}\} \subset \mathbb{N}^2$$

On a

$$\mathrm{Exp}(t^i \cdot P) = (i, 0) + \mathrm{Exp}(P) \quad \text{et} \quad \mathrm{Exp}(\partial_k^j \cdot P) = (0, j) + \mathrm{Exp}(P)$$

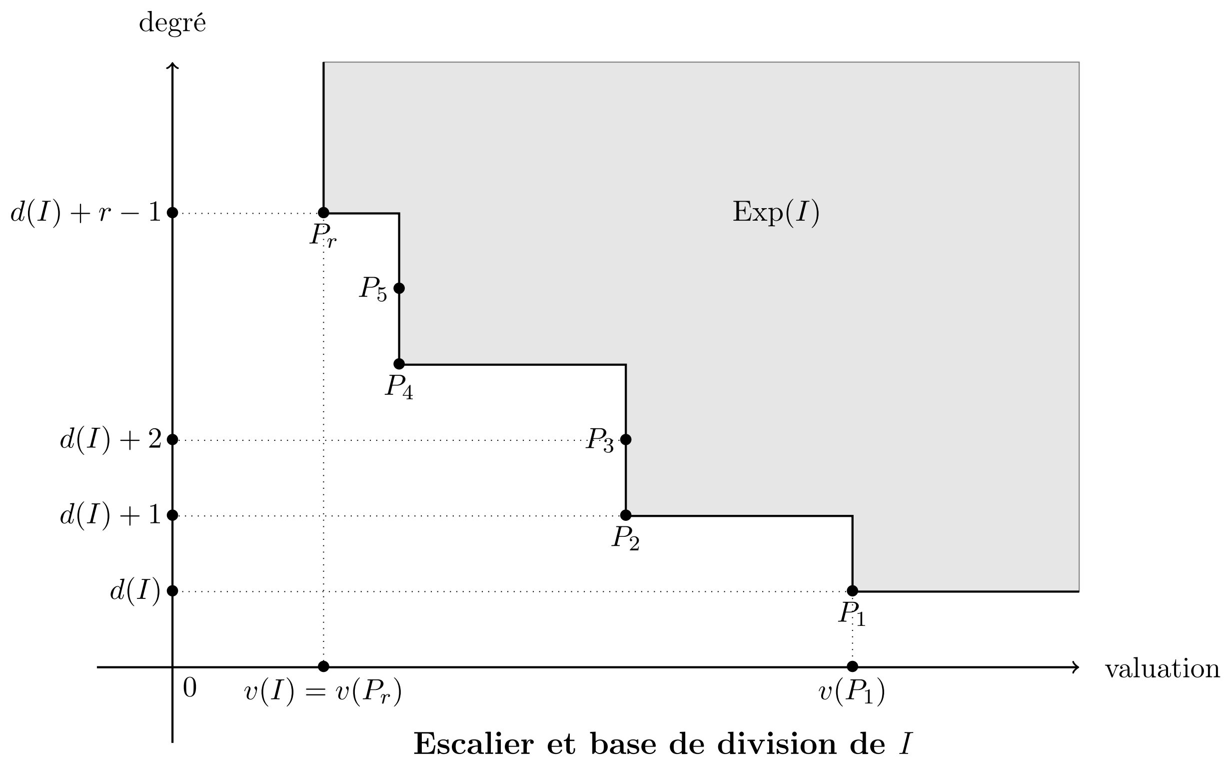
On en déduit que $\mathrm{Exp}(I) = \mathrm{Exp}(I) + \mathbb{N}^2$. Ainsi l'exposant de I est une partie de $\mathbb{N}^2$ délimitée inférieurement par un escalier fini. On peut voir la figure suivante pour un exemple.

Soit P_1 un élément de I de degré minimal d et de valuation minimale parmi les éléments de I de degré d. On construit récursivement un élément P_i de I d'ordre $d(P_{i+1}) = d(P_i) + 1$ et de valuation minimale parmi les éléments de même degré jusqu'à obtenir un élément P_r de valuation minimale dans I.

On obtient ainsi une famille d'opérateurs $(P_1, \ldots, P_r)$ échelonnée pour l'ordre telle que P_i soit de valuation minimale parmi les éléments de même ordre, telle que $d(I) = d(P_1)$ soit l'ordre minimal des éléments de I et telle que $v(I) = v(P_r)$ soit la valuation minimale des éléments de I. Une telle famille est appelée *base de division* de I.

Soit I un idéal de $\mathcal{D}_{X,k}$ et $x \in X$. Alors I_x est un idéal de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k} = \mathcal{D}_{X,k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. On appelle *base de division* de I relativement au point x une base de division $(P_1, \ldots, P_r)$ de l'idéal I_x. Les opérateurs $P_1, \ldots, P_r$ sont des éléments de $I(U)$ pour un certain ouvert affine U contenant x.

La figure ci-dessous illustre graphiquement le positionnement d'une base de division vis à vis de l'exposant de I.



Escalier et base de division de I

Soit maintenant $\mathcal{I}$ un idéal à gauche cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ et $Q \in \mathcal{I}_x$; Q est un opérateur de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ pour un certain ouvert affine U contenant x. On lui associe le couple $(N_k(Q), \overline{N}_k(Q))$ ne dépendant que de x appelé *exposant* de Q en x. Si Q est de norme un, on rappelle que $N_k(Q)$ et $\overline{N}_k(Q)$ sont respectivement la valuation et l'ordre de $(Q \mod \omega)$ dans $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$. *L'exposant* de $\mathcal{I}$ en x est

$$\mathrm{Exp}(\mathcal{I}) = \{(N_k(Q), \overline{N}_k(Q)), Q \in \mathcal{I}_x \backslash \{0\}\} \subset \mathbb{N}^2$$

On définit comme pour un idéal de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$ une base de division de $\mathcal{I}$ relativement au point x. C'est une famille d'éléments $(P_1, \ldots, P_r)$ de $\mathcal{I}_x$ échelonnée pour la fonction $\overline{N}_k$ telle que P_i soit de fonction N_k minimale parmi les éléments de même fonction $\overline{N}_k$, telle que $N_k(\mathcal{I}) = N_k(P_r)$ soit minimale parmi les éléments de I et et telle que $\overline{N}_k(\mathcal{I}) = \overline{N}_k(P_1)$ soit minimale parmi les éléments de I. On demande de plus que les P_i soient normalisés : pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, $\|P_i\|_k = 1$.

Cette dernière condition permet d'assurer la compatibilité des bases de division dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ et dans $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$ après réduction modulo ω. En effet soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ admettant une base de division en x. On note I la réduction modulo ω de $\mathcal{I}$; c'est un idéal cohérent de $\mathcal{D}_{X,k}$ et I_x est un idéal de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$. Alors $(P_1,\ldots,P_r)$ est une base de division de $\mathcal{I}$ relativement à x si et seulement si $(P_1 \mod \omega,\ldots,P_r \mod \omega)$ est une base de division de I_x. En particulier les escaliers et les exposants de I et $\mathcal{I}$ coincident en x.

Les résultats suivants sont démontrés pour $k=0$ par Laurent Garnier dans [2], partie 4. Ils résultent de l'existence d'une division de tout élément de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ par une base de division de $\mathcal{I}$. Ses preuves s'adaptent immédiatement à un indice de congruence quelconque.

Lemme 2.10. *Toute base de division de $\mathcal{I}$ en x engendre l'idéal $\mathcal{I}_x$.*

Une base de division existe toujours pour les idéaux de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Cependant ce n'est pas vrai dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. Si $\mathcal{I}$ est un idéal non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$, il n'est pas toujours possible de normaliser les P_i. En effet de la ω-torsion peut poser problème. Le lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{I}$ admette une base de division en x.

Lemme 2.11. *Un idéal $\mathcal{I}$ non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ admet une base de division relativement à x si et seulement si $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}$ est sans ω-torsion au voisinage de x.*

Le propriété suivante, à condition d'avoir une base de division, fournit une présentation finie d'un idéal cohérent à gauche de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ en tant que $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module à gauche. Il s'agit de la proposition 4.3.1 de [2].

Proposition 2.12. *On suppose que x est un point κ-rationnel. Soit $\mathcal{I}$ un idéal cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ admettant une base de division $(P_1,\ldots,P_r)$ relativement à x. Alors il existe un ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ contenant x et une matrice de relation $R \in \mathrm{M}_{r-1,r}(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k})$ obtenue à partir des P_i pour lesquels le complexe suivant de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules est exacte ;*

$$0 \longrightarrow (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k})^{r-1} \xrightarrow{\cdot R} (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U,k})^{r} \longrightarrow \mathcal{I}_{|U} \longrightarrow 0$$

3 $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes

On définit les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes comme étant les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents dont la variété caractéristique est de dimension au plus un. On démontre dans la partie 3.4 qu'ils sont de longueur finie. Cela découle de l'inégalité de Bernstein (partie 3.3) : un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent est non nul si et seulement si les composantes irréductibles de sa variété caractéristique sont de dimension au moins un. Elle généralise pour un indice k

l'inégalité démontrée par Laurent Garnier. On en déduit que les multiplicités des variétés caractéristiques vont s'additionner dans la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes et qu'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent est nul si et seulement ses multiplicités sont nulles.

On commence par définir la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent dans 3.1. On désigne toujours par U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ contenant x (non supposé κ-rationnel) sur lequel on dispose de coordonnées locales (t, ∂).

3.1 Rappels sur la variété caractéristique

On donne brièvement dans cette partie la construction de la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent, adaptée de celle de Berthelot pour un indice de congruence k. Elle est définie comme étant la variété caractéristique « classique » de la réduction modulo ω d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent, donc d'un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. On pourra voir les notes de Berthelot (par exemple la partie 5.2 de [1]) pour plus de détails.

On rappelle que $\mathcal{D}_{X,k} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est la réduction modulo ω de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$. C'est un faisceau d'algèbres sur la fibre spéciale $X = \mathfrak{X} \times_{\mathcal{V}} \operatorname{Spec} \kappa$ de $\mathfrak{X}$. Comme $\mathfrak{X}$ et X ont même espace topologique, on identifie U à un ouvert affine de X. On note ∂_k l'image de $\omega^k \partial$ dans $\mathcal{D}_{X,k}$. On a

$$\mathcal{D}_{U,k} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n$$

On munit $\mathcal{D}_{X,k}$ de la filtration croissante donnée localement par l'ordre des opérateurs différentiels :

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Fil}^m(\mathcal{D}_{U,k}) = \bigoplus_{0 \le n \le m} \mathcal{O}_U \cdot \partial_k^n$$

On note $\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k} = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \operatorname{gr}_m \mathcal{D}_{X,k}$ le gradué associé et ξ_k l'image de ∂_k dans $\operatorname{gr}_1(\mathcal{D}_{U,k})$. Localement, $\operatorname{gr}(\mathcal{D}_{U,k}) \simeq \mathcal{O}_U[\xi_k]$ est un anneau de polynômes en une variable sur $\mathcal{O}_U$. En particulier le fibré cotangent T^*X de X est isomorphe à $\operatorname{Spec} \operatorname{gr}(\mathcal{D}_{X,k})$ en tant que κ-schéma. On identifie ces deux schémas dans la suite. On note $\pi : T^*X \to X$ la projection canonique.

Soit $P = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial_k^n$ un élément de $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ d'ordre d. On lui associe un élément du gradué $\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}(U)$ appelé *symbole principal* de P par

$$\sigma(P) = a_d \cdot \xi_k^d \in \operatorname{gr}_d \mathcal{D}_{X,k}(U)$$

Remarque 3.1. *On a $[\omega^k \partial, t] = \omega^k \cdot \mathrm{id}$ dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}(U)$. Pour $k \geq 1$, on a donc $[\partial_k, t] = 0$ dans $\mathcal{D}_{X,k}(U)$. Ainsi $\mathcal{D}_{X,k}(U)$ est une algèbre commutative, donc une algèbre de polynômes en une variable : $\mathcal{D}_{X,k}(U) = \mathcal{O}_X(U)[\partial_k]$.*

Une filtration $(\operatorname{Fil}^\ell E)_{\ell \in \mathbb{N}}$ d'un $\mathcal{D}_{X,k}$-module quasi-cohérent à gauche E est une suite croissante $(\operatorname{Fil}^\ell E)_\ell$ de sous $\mathcal{O}_X$-modules quasi-cohérents de E telle que

1. $E = \bigcup_{\ell \geq 0} \mathrm{Fil}^{\ell} E$;
2. $\forall n, \ell \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{Fil}^n \mathcal{D}_{X,k}) \cdot (\mathrm{Fil}^{\ell} E) \subset \mathrm{Fil}^{\ell+n} E$.

Le gradué $\mathrm{gr}\, E$ pour une telle filtration est un $\mathrm{gr}\, \mathcal{D}_{X,k}$-module. La filtration est appelée *bonne filtration* si $\mathrm{gr}\, E$ est un $\mathrm{gr}\, \mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. Puisque X est quasi-compacte, tout $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent admet une bonne filtration globale.

On se donne maintenant un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent E muni d'une bonne filtration globale. On associe à E le $\mathcal{O}_{T^*X}$-module cohérent suivant

$$\tilde{E} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\mathrm{gr}\, \mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\mathrm{gr}\, E)$$

Définition 3.2. *La variété caractéristique de E est le support de $\tilde{E}$:* $\mathrm{Car}\, E = \mathrm{Supp}\, \tilde{E}$.

C'est une sous-variété fermée de T^*X puisque $\tilde{E}$ est cohérent. La variété caractéristique est indépendante du choix de la bonne filtration choisie.

On appelle *multiplicités* de E les multiplicités des composantes irréductibles de $\mathrm{Car}\, E$. Soit C une composante irréductible de $\mathrm{Car}\, E$ et η son point générique. Par définition la multiplicité m_C de C est la longueur du $(\mathcal{O}_{T^*X})_{\eta}$-module artinien $\tilde{E}_{\eta}$. C'est un entier positif non nul dès que E est non nul. Lorsque C est un fermé irréductible non vide de T^*X non contenu dans $\mathrm{Car}\, E$, on pose $m_C = 0$.

On note $I(\mathrm{Car}\, E)$ l'ensemble des composantes irréductibles de la variété caractéristique de E. On définit le *cycle caractéristique* de E par la somme formelle

$$\mathrm{CC}(E) = \sum_{C \in I(\mathrm{Car}\, E)} m_C \cdot C$$

On rappelle le résultat classique suivant qu'on utilisera plus tard.

Proposition 3.3. *Soit* $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow L \longrightarrow 0$ *une suite exacte de $\mathcal{D}_{X,k}$-modules cohérents. Alors* $\mathrm{Car}\, N = \mathrm{Car}\, M \cup \mathrm{Car}\, L$. *De plus si C est une composante irréductible de* $\mathrm{Car}\, N$, *alors* $m_C(N) = m_C(M) + m_C(L)$ *(avec $m_C(M) = 0$ ou $m_C(L) = 0$ si C n'est pas dans* $\mathrm{Car}\, M$ *ou* $\mathrm{Car}\, L$*).*

Soit maintenant $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent à gauche. Un *modèle entier* de $\mathcal{E}$ est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent $\mathring{\mathcal{E}}$ sans ω-torsion tel que $\mathcal{E} \simeq \mathring{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} K$. Puisque $\mathcal{E}$ est cohérent, il existe un modèle entier $\mathring{\mathcal{E}}$. La réduction $\mathring{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ modulo ω de $\mathring{\mathcal{E}}$ est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent.

Définition 3.4. *La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ est la variété caractéristique du $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent $\mathring{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$:* $\mathrm{Car}\, \mathcal{E} = \mathrm{Car}\, \mathring{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$.

C'est un sous-schéma fermé du fibré cotangent T^*X de X indépendant du choix du modèle entier. On appelle *multiplicités* de $\mathcal{E}$ les multiplicités de sa variété caractéristique.

On termine par des exemples explicites de variétés caractéristiques. Ils permettent en pratique de calculer toutes les variétés caractéristiques.

Exemple 3.5. *On suppose que $\mathfrak{X}$ est affine munie d'un système de coordonnées locales (t, ∂). On note toujours $\xi_k = \sigma(\partial_k)$ l'image de ∂_k dans $\operatorname{gr}_1 \mathcal{D}_{X,k}$.*

1. *Puisque le support de $\mathcal{D}_{X,k}$ est X tout entier, on a $\operatorname{Car} \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} = T^*X$.*
2. *Si $\mathcal{E} = 0$, alors sa variété caractéristique est vide.*
3. *Soit $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ avec $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$ un opérateur différentiel non nul. Quitte à multiplier P par une bonne puissance de ω, on peut supposer que $\|P\|_k = 1$. Alors $\mathring{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/P$ est un modèle entier de $\mathcal{E}$. On note $d = \overline{N}_k(P)$ et b le coefficient d'indice d de P. La réduction $\bar{P}$ de P modulo ω est un opérateur de $\mathcal{D}_{X,k}(X)$ d'ordre d. Son coefficient dominant est $\bar{b} = (b \mod \omega) \in \mathcal{O}_X(X)$.*

   On munit $\mathring{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \simeq \mathcal{D}_{X,k}/\bar{P}$ de la filtration quotient. On a $\operatorname{gr}(\mathring{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) = \operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k}/(\sigma(\bar{P}))$, où $\sigma(\bar{P}) = \bar{b} \cdot \xi_k^d$ est le symbole principal de $\bar{P}$. L'annulateur de ce module est l'idéal engendré par $\sigma(\bar{P})$. La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ est donnée par l'équation

   $$\operatorname{Car}(\mathcal{E}) = \{(t, \xi) \in T^*X : \sigma(\bar{P})(t, \xi) = \bar{b}(t) \cdot \xi^d = 0\}$$

4. *Plus généralement soit $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal cohérent non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. On se donne un modèle entier $\mathring{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathring{\mathcal{I}}$ de $\mathcal{E}$. On note I la réduction modulo ω de $\mathring{\mathcal{I}}$. C'est un idéal de $\mathcal{D}_{X,k}$. Alors*

   $$\operatorname{Car}(\mathcal{E}) = \{(t, \xi) \in T^*X : \sigma(P)(t, \xi) = 0 \quad \forall P \in I\}$$

3.2 Réduction au cas des $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-modules cohérents

Soit $x \in X$ et E un $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module cohérent. On lui associe une variété caractéristique $\operatorname{Car} E$ définie comme sous-schéma fermé de $\operatorname{Spec}\left(\operatorname{gr}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})\right)$. On note $s : X \to T^*X$ la section nulle du fibré cotangent. Les notions de variétés caractéristiques et de multiplicités coincident entre $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ et $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$:

Lemme 3.6. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent et $\mathring{\mathcal{E}}$ un modèle entier. On dispose d'un isomorphisme*

$$\operatorname{Car}(\mathring{\mathcal{E}} \otimes \kappa) \times_X \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}) \simeq \operatorname{Car}(\mathring{\mathcal{E}}_x \otimes \kappa)$$

De plus les multiplicités de $\operatorname{Car}(\mathring{\mathcal{E}}_x \otimes \kappa)$ sont les multiplicités des composantes irréductibles de $\operatorname{Car}(\mathring{\mathcal{E}} \otimes \kappa)$ contenant $s(x)$.

Démonstration. On note $E = \overset{\circ}{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. C'est un $\mathcal{D}_{X,k}$-module cohérent. L'isomorphisme de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_x \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \simeq (\overset{\circ}{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)_x$ est en fait un isomorphisme de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-modules car 2 est un isomorphisme de κ-algèbres. Le problème se ramène donc à démontrer que $\mathrm{gr}(E) \otimes \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathrm{gr}(E_x)$ en tant que $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})$-modules. La question étant locale en x, on peut supposer X affine.

Comme E est $\mathcal{D}_{X,k}$-cohérent, E est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Il est donc suffisant d'étudier le module des sections globales $E(X)$. Puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est le localisé de $\mathcal{O}_X(X)$ en x, $E(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à E_x en tant que $\mathcal{O}_{X,x}$-module. En particulier le morphisme $\mathcal{D}_{X,k}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_{X,x} \cdot \partial_k^n$ est un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X,x}$-modules car $\mathcal{D}_{X,k} = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{O}_X \cdot \partial_k^n$. Il s'agit d'un isomorphisme de κ-algèbres pour le produit sur $\mathcal{D}_{X,k}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ induit par le produit tensoriel :

$$\mathcal{D}_{X,k}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k} \tag{2}$$

On en déduit que $E(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \simeq E_x$ est un $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-isomorphisme.

On munit $E(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ de la filtration $\mathrm{Fil}^n(E(X)) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x}$ et E_x de la filtration image. Alors $\mathrm{gr}(E(X)) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathrm{gr}(E_x)$ en tant que $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}(X))$-modules. Il reste à vérifier que leurs supports coïncident. Soit $y \in \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{X,x})$. On a

$$\left(\mathrm{gr}(E(X)) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x}\right)_y = (\mathrm{gr}\, E(X))_{\varphi^{-1}(y)} \otimes_{\mathcal{O}_{X,\varphi^{-1}(y)}} (\mathcal{O}_{X,x})_y$$

où φ est le morphisme canonique $\mathcal{O}_X(X) \to \mathcal{O}_{X,x}$. Comme $\mathcal{O}_X(X)$ est intègre, ce module est non nul si et seulement si $(\mathrm{gr}\, E(X))_{\varphi^{-1}(y)}$ est non nul. $\square$

Remarque 3.7. *On a demontré que* $\mathcal{D}_{X,k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X,x} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$ *en tant que* κ*-algèbres. On identifie par la suite ces deux algèbres.*

On note maintenant le $\mathcal{D}_{X,k}$-module $\overset{\circ}{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ par $\mathcal{E} \otimes \kappa$ et le $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_x \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ par $\mathcal{E}_x \otimes \kappa$. Ces notations sous-entendent le choix d'un modèle entier. Puisque la variété caractéristique ne dépend pas du modèle entier, les objets $\mathrm{Car}(\mathcal{E} \otimes \kappa)$ et $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$ sont définis sans ambiguïté.

Lorsque x est un point κ'-rationnel pour une extension finie κ' de κ, il sera parfois nécessaire d'étendre les scalaires à κ'. Cependant si E est un $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module cohérent, les variétés caractéristiques de E et $E \otimes_\kappa \kappa'$ auront la même dimension puisque l'extension $\kappa' \backslash \kappa$ est finie. Il est donc suffisant de tout démontrer au niveau de κ.

Définition 3.8. *On appelle multiplicités de* $\mathcal{E}$ *en* x *les multiplicités de la variété caractéristique* $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$.

D'après le lemme 3.6, il s'agit des multiplicités des composantes irréductibles de la variété caractéristique de $\mathcal{E}$ contenant $s(x)$.

L'étude de la variété caractéristique d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent se ramène donc à étudier les variétés caractéristiques de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-modules cohérents. On explicite dans ce paragraphe la variété caractéristique d'un $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module cohérent non nul E. On peut tout d'abord se ramener au cas où $E = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I$ pour un idéal à gauche I de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$. En effet puisque E est cohérent, E est engendré par des sections globales $e_1, \ldots, e_r$. Si $I_i = \mathrm{Ann}_{\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}}(e_i)$, alors $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k} \cdot e_i \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I_i$. Comme la variété caractéristique est un support et puisque le support d'une somme est l'union des supports des termes de la somme, on a

$$\mathrm{Car}(E) = \bigcup_{i=1}^{r} \mathrm{Car}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I_i)$$

Ainsi on peut supposer que $E = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I$. Si $I = 0$, alors $\mathrm{Car}\, E = \mathrm{Spec}\,\big(\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})\big)$ car le support de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$ est l'espace tout entier. On se place maintenant dans le cas où I est un idéal non nul. Soit $P_1 \ldots, P_r$ une base de division de I comme définie dans la partie 2.3. Les symboles principaux $\sigma(P_1), \ldots, \sigma(P_r)$ engendrent le gradué $\mathrm{gr}(I)$ comme $\mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})$-module. On note $d = d(I)$ et $\alpha = v(I)$. Par définition le couple (α, d) est l'exposant de I. On écrit $\mathrm{Exp}(P_1) = (d, \alpha_1)$, $\mathrm{Exp}(P_2) = (d+1, \alpha_2)$, $\ldots$, $\mathrm{Exp}(P_r) = (d+r-1, \alpha)$ où $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha$. Quitte à normaliser les P_i, on a $\sigma(P_i) = t^{\alpha_i} \cdot \xi_k^{d+i-1}$. La variété caractéristique de E est alors

$$\mathrm{Car}(E) = \Big\{(t, \xi_k) \in \mathrm{Spec}\ \mathrm{gr}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}) : \quad t^{\alpha_1} \cdot \xi_k^d = t^{\alpha_2} \cdot \xi_k^{d+1} = \cdots = t^{\alpha} \cdot \xi_k^{d+r-1} = 0\Big\}$$

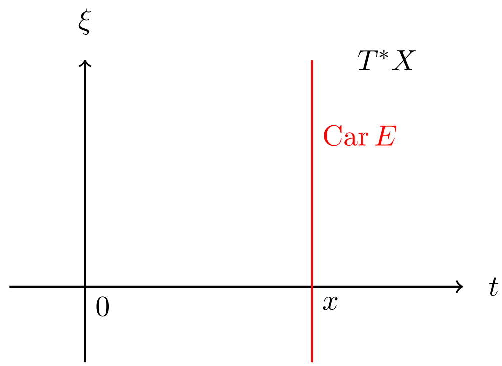
Dans $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$, la condition $I \neq 0$ n'est pas équivalente à $\alpha \neq 0$ ou $d \neq 0$. On peut avoir $\alpha = d = 0$: c'est le cas par exemple pour $I = (t^n, \partial_k^{\ell})$, $n, \ell \in \mathbb{N}$. Les équations de la variété caractéristique de $E = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I$ se réduisent aux équations suivantes :

$$\mathrm{Car}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I) = \begin{cases} t \cdot \xi_k = 0 \ \text{ si } \ d(I) \neq 0 \ \text{ et } \ v(I) \neq 0 \\ \xi_k = 0 \quad \text{si } \ v(I) = 0 \\ t = 0 \quad \ \text{si } \ d(I) = 0 \\ t = 0 \ \text{ et } \ \xi_k = 0 \ \text{ si } \ d(I) = 0 \ \text{ et } \ v(I) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Lorsque $\dim(\mathrm{Car}\, E) = 1$, la variété caractéristique de E a une ou deux composantes irréductibles données par les équations $t = 0$ et $\xi_k = 0$. Lorsque $\dim(\mathrm{Car}\, E) = 0$, $\mathrm{Car}\, E = (0, 0)$. En particulier l'inégalité de Bernstein est fausse pour les $\mathcal{D}_{X,k}$-modules cohérents. Cependant si E provient d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent, on montrera que le dernier cas de 3 n'est pas possible. La variété caractéristique de E sera donc donnée par l'une des trois premières équations.

Exemple 3.9.

1. *Si* $E = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/(t^\alpha \cdot \partial_k^d)$ *avec* $\alpha, d \geq 1$*, alors* $\operatorname{Car} E$ *a deux composantes irréductibles d'équations* $t = 0$ *et* $\xi_k = 0$.
2. *Si* $E = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/(t^n, \partial_k^\ell)$*, alors* $\operatorname{Car} E = (0, 0)$.
3. *Soit* $E = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/x$ *un* $\mathcal{D}_{X,k}$*-module supporté en* x*. La variété caractéristique de* E *en* x *est la droite d'équation* $t = 0$*. Soit* U *un ouvert affine de* X *contenant* x *sur lequel on dispose d'un système de coordonnées locales* (t, ∂)*. Le module* E *étant nul en dehors de* U*, on peut supposer que* $X = U$*. Alors* T^*X *est affine et l'on note* (t, ξ) *le système de cordonnées locales de* T^*X *associé à* (t, ∂_k)*. On a* $\operatorname{Car}(E) = \{(t, \xi) \in T^*X : t = x\}$*. La variété caractéristique de* E *est la droite verticale de* T^*X *passant par* x *:*



Un tel module est appelé un Dirac.

Un $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/I$ distinct de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$ a deux multiplicités correspondant aux composantes $t = 0$ et $\xi_k = 0$, avec multiplicité nulle si la composante est un point ou si la composante est vide. Lorsque x est κ-rationnel, ces multiplicités correspondent aux nombres $d(I)$ et $v(I)$. Cela a été prouvé par P.Maisonobe dans [6], partie III, paragraphe 2.1.

Soit maintenant $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}$ avec $\mathcal{J}$ un idéal non nul. D'après ce que l'on vient de dire, $\mathcal{E}$ a deux multiplicités en x (potentiellement nulles) correspondant aux composantes $t = 0$ et $\xi_k = 0$ de $\operatorname{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$. Ces multiplicités en un point rationnel sont les fonctions $\overline{N}_k(\mathcal{J})$ et $N_k(\mathcal{J})$:

Proposition 3.10. *Soit* x *un point* κ*-rationnel et* $\mathcal{J}$ *un idéal cohérent non nul de* $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ *tel que* $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}$ *soit sans* ω*-torsion. Alors* $\overline{N}_k(\mathcal{J})$ *et* $N_k(\mathcal{J})$ *sont les multiplicités de* $\mathcal{E}$ *en* x *des composantes* $(\xi_k = 0)$ *et* $(t = 0)$ *de* $\operatorname{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}$ est sans ω-torsion, $\mathcal{J}$ admet une base de division dans $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$ d'après le lemme 2.10. L'énoncé étant local en x, on peut supposer $\mathfrak{X} = U$ affine. La proposition 2.12 permet d'obtenir la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^1_{\mathcal{V}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) \longrightarrow \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \longrightarrow \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \longrightarrow 0$$

Par hypothèse $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{I}$ est sans ω-torsion. Donc $\mathrm{Tor}^1_{\mathcal{V}}(\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa) = 0$. On obtient donc

$$\mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{V}} \kappa \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa)_x$$

Ainsi le module $\mathcal{E}_x \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$ est donné par l'idéal $I = \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{V}} \kappa$. On rappelle que $\mathcal{I}$ et I ont le même escalier en x et que les fonctions $\overline{N}_k(\mathcal{I})$ et $N_k(\mathcal{I})$ coïncident avec $v(I)$ et $d(I)$. Comme les multiplicités de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I$ sont respectivement l'ordre et la valuation de l'idéal I en x, on obtient le résultat. $\square$

Soit enfin $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal $\mathcal{I}$ non nul. Si $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}'$ pour un autre idéal $\mathcal{I}'$, alors la proposition 4.2.1 de l'article [2] de Laurent Garnier (division selon une base de division) implique que $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}'$ ont les mêmes fonctions $\overline{N}_k$ et N_k. Les entiers $\overline{N}_k(\mathcal{I})$ et $N_k(\mathcal{I})$ ne dépendent donc pas du choix de l'idéal $\mathcal{I}$ définissant $\mathcal{E}$ comme un quotient de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Lorsque $\mathcal{I} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot P$ avec $P \neq 0$, ces nombres sont simplement $\overline{N}_k(P)$ et $N_k(P)$.

On peut choisir un modèle entier de $\mathcal{E}$ de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}$. C'est un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}$-module cohérent sans ω-torsion tel que $\mathcal{E} \simeq (\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{V}} K$. D'après le lemme 2.11, l'idéal $\mathcal{I}$ admet une base de division en chaque point $x \in \mathfrak{X}$. Puisque $(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}) \otimes_{\mathcal{V}} K \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/(\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{V}} K)$, on a $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/(\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{V}} K)$. Ainsi les idéaux $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{V}} K$ ont mêmes fonctions $\overline{N}_k$ et N_k. Enfin puisque $\mathcal{J}$ et $\mathcal{J} \otimes_{\mathcal{V}} K$ ont les mêmes escaliers, on obtient $\overline{N}_k(\mathcal{I}) = \overline{N}_k(\mathcal{J})$ et $N_k(\mathcal{I}) = N_k(\mathcal{J})$. On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 3.11. *Soit x un point κ-rationnel et $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ non nul. Alors $\overline{N}_k(\mathcal{I})$ et $N_k(\mathcal{I})$ sont les multiplicités de $\mathcal{E}$ en x des composantes $(\xi_k = 0)$ et $(t = 0)$ de* $\mathrm{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa)$.

3.3 Inégalité de Bernstein

Cette partie est consacrée à la démonstration de l'inégalité de Bernstein : un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent est non nul si et seulement si sa variété caractéristique est de dimension au moins un, ou de manière équivalente si ses multiplicités ne sont pas toutes zéros.

Comme on a pu le voir dans la partie précédente, l'inégalité de Bernstein est fausse au niveau de $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$. Par exemple la variété caractéristique de $E = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/(t^p, \partial_k)$ est réduite à un point. L'inégalité de Bernstein étant vraie pour un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent, cela signifie que E ne provient pas d'un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. On peut cependant remarquer que E est un κ-espace vectoriel de dimension finie (égale à p). Ce résultat est vrai plus généralement pour les $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-modules cohérents dont la variété caractéristique est un point :

Lemme 3.12. *Soit $x \in X$ et E un $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module de type fini tel que* $\operatorname{Car} E$ *soit un point. Alors E est un κ-espace vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. On traite tout d'abord le cas où x est un point κ-rationnel. On se donne une bonne filtration $(\operatorname{Fil}^i E)_{i\in\mathbb{N}}$ de E. La filtration est bonne si et seulement si $\operatorname{Fil}^i(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})\cdot \operatorname{Fil}^j(E) = \operatorname{Fil}^{i+j}(E)$ à partir d'un rang j et si les $\operatorname{Fil}^i(E)$ sont des $\mathcal{O}_{X,x}$-modules de type fini. Quitte à décaler la filtration, on peut supposer que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \operatorname{Fil}^i(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}) \cdot \operatorname{Fil}^j(E) = \operatorname{Fil}^{i+j}(E)$$

En particulier $\operatorname{Fil}^i(E) = \operatorname{Fil}^i(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k})\cdot\operatorname{Fil}^0(E)$. Ainsi tout système de générateurs $(e_1,\ldots,e_r)$ de $\operatorname{Fil}^0(E)$ en tant que $\mathcal{O}_{X,x}$-module engendre E en tant que $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module. On note $\operatorname{gr} E$ le gradué associé.

On suppose que $\operatorname{Car} E$ est un point. L'idéal définissant $\operatorname{Car} E$ est un idéal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}[\xi_k]$ homogène en ξ_k : le point $\operatorname{Car}(E)$ correspond nécessairement à l'idéal (t, ξ_k). Il existe donc deux entiers d et v tels que t^v et ξ_k^d annulent $\operatorname{gr} E$. En particulier $\xi_k^d \cdot \operatorname{gr}^i(E)$ est nul dans $\operatorname{gr}^{d+i}(E)$. Sur la filtration cela se traduit par

$$\partial_k^d \cdot \operatorname{Fil}^i E \subset \operatorname{Fil}^{i+d-1}(E) = \operatorname{Fil}^{d-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}) \cdot \operatorname{Fil}^i(E)$$

Pour $i = 0$ on obtient

$$\partial_k^d \cdot \operatorname{Fil}^0(E) \subset \operatorname{Fil}^{d-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}) \cdot \operatorname{Fil}^0(E)$$

Autrement dit, pour tout entier i,

$$\operatorname{Fil}^i(E) = \operatorname{Fil}^i(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}) \cdot \operatorname{Fil}^0(E) \subset \operatorname{Fil}^{d-1}(\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}) \cdot \operatorname{Fil}^0(E)$$

La filtration de E est donc stationnaire et $\operatorname{Fil}^n(E) = E$ pour tout $n \geq d-1$. Ainsi E est engendré sur $\mathcal{O}_{X,x}$ par les $\partial_k^j \cdot e_i$ pour $j \in \{0,\ldots,d-1\}$ et $i \in \{1,\ldots,r\}$: E est un $\mathcal{O}_{X,x}$-module de type fini.

On rappelle $\operatorname{Fil}^0(E)$ est annulé par t^v. Lorsque $k \geq 1$, $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$ est commutatif. Puisque $\operatorname{Fil}^0(E)$ engendre E en tant que $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module, E est annulé par t^v. Sinon le fait que t^v annule $\operatorname{gr} E$ implique que $t^{v(\ell+1)}$ annule $\operatorname{Fil}^\ell(E)$. En particulier t^{vd} annule $E = \operatorname{Fil}^{d-1}(E)$. Dans tous les cas E est annulé par une puissance de t que l'on note encore t^v.

Ainsi $E = E/t^v E$ est un $\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$-module de type fini. Pour conclure il suffit de prouver que $\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$ est un κ-espace vectoriel de dimension finie. On le montre par récurrence sur v. On a la suite exacte d'anneaux

$$0 \longrightarrow t^{v-1}\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}/t^{v-1}\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow 0$$

avec $t^{v-1}\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x} \simeq \kappa = \mathcal{O}_{X,x}/t\mathcal{O}_{X,x}$ (via la multiplication par t^{v-1}). La première flèche $\kappa \to \mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$ munit $\mathcal{O}_{X,x}/t^v\mathcal{O}_{X,x}$ d'une structure de κ-espace vectoriel. La suite reste exacte en considérant les quotients comme des κ-espaces vectoriels. Par hypothèse de récurrence, $\mathcal{O}_{X,x}/t^{v-1}\mathcal{O}_{X,x}$ est un κ-espace vectoriel de dimension finie. Ainsi $\mathcal{O}_{X,x}/t^{v}\mathcal{O}_{X,x}$ est aussi de dimension finie sur κ.

Si maintenant x est un point quelconque, alors x est κ'-rationnel pour une extension finie κ' de κ. Le même raisonnement montre que E est un κ'-espace vectoriel de dimension finie. Puisque κ' est de dimension finie sur κ, E sera un κ-espace vectoriel de dimension finie. □

Proposition 3.13 (inégalité de Bernstein)**.** *Soit* $\mathcal{E}$ *un* $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$*-module cohérent non nul. Alors toute composante irréductible de* $\operatorname{Car}\mathcal{E}$ *est de dimension au moins un. En particulier* $\dim(\operatorname{Car}\mathcal{E}) \geq 1$*. De plus les multiplicités de* $\mathcal{E}$ *sont non nulles.*

Démonstration. On note $E = \mathcal{E} \otimes \kappa$ la réduction modulo ω d'un modèle entier $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}$. On rappelle que par définition $\operatorname{Car}\mathcal{E} = \operatorname{Car} E$. Si $\mathcal{E}$ est non nul, alors E est aussi non nul. Dans ce cas $\operatorname{Car}\mathcal{E} \neq \emptyset$.

On suppose qu'une composante irréductible de $\operatorname{Car}\mathcal{E}$ est un point $z = (x, \xi)$. Dans ce cas $\operatorname{Car}\mathcal{E}_x = \operatorname{Car} E_x$ est contenue dans un point. Si cette variété caractéristique est vide, alors $\mathcal{E}_x = 0$ et $E_x = 0$. Sinon le lemme 3.12 montre que E_x est un κ-espace vectoriel de dimension finie.

On en déduit que $\mathcal{E}$ est un K-espace vectoriel de dimension finie au voisinage de x. En effet soit $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_r$ une base de E_x comme κ-espace vectoriel. On note $e_1, \dots, e_r$ des relèvements de ces éléments dans $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_x$ et $\mathcal{F} = \mathcal{V} \cdot e_1 + \cdots + \mathcal{V} \cdot e_r$. C'est un sous-$\mathcal{V}$-module complet de $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_x$ pour la topologie ω-adique. Soit $y \in \overset{\circ}{\mathcal{E}}_x$. On montre que $y \in \mathcal{F}$. Puisque $\bar{y} \in E = \kappa \cdot \bar{e}_1 + \cdots + \kappa \cdot \bar{e}_r$, il existe $y_1 \in \mathcal{F}$ et $z_1 \in \omega \cdot \overset{\circ}{\mathcal{E}}_x$ tels que $y = y_1 + z_1$. De même $\omega^{-1} z_1$ s'écrit sous la forme $y_2 + \tilde{z}_2$ avec $y_2 \in \mathcal{F}$ et $\tilde{z}_2 \in \omega \cdot \overset{\circ}{\mathcal{E}}_x$. On obtient $y = (y_1 + \omega y_2) + z_2$ avec $y_1, y_2 \in \mathcal{F}$ et $z_2 = \omega \tilde{z}_2 \in \omega^2 \cdot \overset{\circ}{\mathcal{E}}_x$. Une récurrence montre que pour tout entier $n \geq 1$, il existe $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{F}$ et $z_n \in \omega^n \cdot \overset{\circ}{\mathcal{E}}_x$ tels que

$$y = y_1 + \omega y_2 + \cdots + \omega^{n-1} y_n + z_n$$

Puisque $\mathcal{F}$ est complet pour la topologie ω-adique, le terme $y_1 + \omega y_2 + \cdots + \omega^{n-1} y_n$ converge vers un élément $y_\infty \in \mathcal{F}$. Par ailleurs comme $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ est sans ω-torson, $\overset{\circ}{\mathcal{E}}$ est séparé pour la topologie ω-adique. Ainsi la suite $(z_n)_n$ converge vers zéro. Le passage à la limite $n \to \infty$ donne $y = y_\infty \in \mathcal{F}$. Autrement dit $\overset{\circ}{\mathcal{E}}_x = \mathcal{F} = \mathcal{V} \cdot e_1 + \cdots + \mathcal{V} \cdot e_r$. On obtient donc que $\mathcal{E}_x \simeq \overset{\circ}{\mathcal{E}}_x \otimes_{\mathcal{V}} K = K \cdot e_1 + \cdots + K \cdot e_r$ est un K-espace vectoriel de dimension finie.

On rappelle que $[\omega^k \partial, t] = \omega^k \cdot \mathrm{id}$. Comme $\mathcal{E}_x$ est un K-espace vectoriel de dimension finie, on a

$$\operatorname{Tr}([\omega^k \partial, t]) = 0 = \operatorname{Tr}(\omega^k \cdot \mathrm{id}) = \omega^k \cdot \operatorname{Tr}(\mathrm{id}) = (\omega^k \dim_K \mathcal{E}_x) \cdot \mathrm{id}$$

Puisque K est de caractéristique nulle, $\dim_K \mathcal{E}_x = 0$. Donc $\mathcal{E}_x = 0$ et $\mathcal{E}$ est nul au voisinage de x.

Dans tous les cas $E_x = 0$ et E est nul au voisinage de x. Ainsi le support de E est un sous-schéma fermé propre de X : sa dimension est strictement inférieure à $\dim X = 1$ puisque X est irréductible. Le support de E consiste donc en un nombre fini de points. Autrement dit E est une somme directe de Dirac (ie de $\mathcal{D}_{X,k}$-modules supportés en un point). Mais la variété caractéristique d'un Dirac est de dimension un (exemple 3.9). Alors d'après la proposition 3.3, la variété caractéristique de E en x est une union finie de droites. Cela contredit l'hypothèse qu'une composante irréductible est un point. Ainsi soit $\mathcal{E}$ est nul, soit les composantes irréductibles de $\operatorname{Car} \mathcal{E}$ sont de dimension au moins un.

On rappelle que $\operatorname{Car} E = \operatorname{Supp} \tilde{E}$ où $\tilde{E} = \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}(\operatorname{gr} \mathcal{D}_{X,k})} \pi^{-1}(\operatorname{gr} E)$ est un $\mathcal{O}_{T^*X}$-module cohérent. Soit η le point générique d'une composante irréductible C de $\operatorname{Car} \mathcal{E}$. La multiplicité m_C de C est la longueur du $(\mathcal{O}_{T^*X})_\eta$-module artinien $\tilde{E}_\eta$. Si $\mathcal{E}$ est non nul, alors $\tilde{E}_\eta$ est aussi non nul. Sa longueur m_C est donc au moins un. Autrement dit les multiplicités des composantes irréductibles de $\operatorname{Car} \mathcal{E}$ sont toutes non nulles. $\square$

Corollaire 3.14. *Un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est nul si et seulement* $\dim(\operatorname{Car} \mathcal{E}) = 0$*, ou de manière équivalente si toutes ses multiplicités sont nulles.*

Démonstration. Le premier point découle de la proposition 3.13. On a vu que $\mathcal{E} \neq 0$ induit $\operatorname{Car} \mathcal{E} \neq \emptyset$. En particulier $\operatorname{Car} \mathcal{E} = \emptyset$ implique $\mathcal{E} = 0$. Dans ce cas les multiplicités de $\mathcal{E}$ en les fermés irréductibles non vides de T^*X sont nulles par définition. Ainsi $\mathcal{E}$ est nul si et seulement si ses multiplicités sont toutes nulles. $\square$

3.4 Modules holonomes

Définition 3.15. *Un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent $\mathcal{E}$ est appelé module holonome si $\mathcal{E} = 0$ ou si* $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{E}) = \dim X = 1$.

Par l'inégalité de Bernstein, un module $\mathcal{E}$ est holonome si et seulement si $\dim \operatorname{Car} \mathcal{E} \leq 1$. La catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes est une sous-catégorie abélienne des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents d'après la proposition 3.3. On reécrit ci-dessous son énoncé pour les $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents.

Proposition 3.16. *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents. Alors* $\operatorname{Car} \mathcal{N} = \operatorname{Car} \mathcal{M} \cup \operatorname{Car} \mathcal{L}$*. En particulier $\mathcal{N}$ est holonome si et seulement si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ le sont.*

Voici un exemple de modules holonomes : tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent de la forme $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ est holonome dès que $\mathcal{I}$ est un idéal non nul.

On regarde tout d'abord le cas très explicite où $\mathfrak{X} = U$ est affine et $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/P$ pour un opérateur $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(\mathfrak{X})$ non nul. On normalise P afin d'avoir $\|P\|_k = 1$. Soit $\bar{P}$

l'image de P dans $\mathcal{D}_{X,k}(X)$ et $x \in X$. On écrit $\bar{P} = \sum_{n=0}^{d} a_n \cdot \partial_{\underline{k}}^{n}$ avec $d = \overline{N}_k(P)$. On note $\alpha = N_k(P)$ la valuation de a_d dans $\mathcal{O}_{X,x}$. Quitte à multiplier $\bar{P}$ par un élément inversible de $\mathcal{O}_{X,x}$, on peut supposer que le coefficient dominant de $\bar{P}$ est t^α. Par définition, (d, α) est l'exposant de P et de $\bar{P}$. On note $E = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/\bar{P}$. Lorsque x est κ-rationnel, les multplicités de E sont d et α. L'idéal annulateur de E est le radical de l'idéal engendré par le symbole principal $\sigma(\bar{P}) = t^\alpha \cdot \xi_k^d$. On suppose P non inversible au voisinage de x, ce qui est équivalent à avoir $\alpha \neq 0$ ou $d \neq 0$ d'après le corollaire 2.8. Dans ce cas E est $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module non nul. La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ en x est alors donnée par les équations

$$\operatorname{Car} E = \begin{cases} t \cdot \xi_k = 0 & \text{si} \quad \alpha \neq 0 \quad et \quad d \neq 0 \\ \xi_k = 0 & \text{si} \quad \alpha = 0 \\ t = 0 & \text{si} \quad d = 0 \end{cases}$$

Ces composantes irréductibles sont toutes de dimension 1 et $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa) = 1$. La variété caractéristique de $\mathcal{E}$ est donc de dimension 1 et $\mathcal{E}$ est holonome. Si P est inversible au voisinage de x, alors $E = 0$ et la variété caractéristique de $\mathcal{E}$ en x est vide. Cette condition est équivalente à $\alpha = d = 0$. On retrouve ainsi l'inégalité de Bernstein.

On passe au cas où $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal $\mathcal{I}$ non nul. Soit $\mathring{\mathcal{E}} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k}/\mathcal{J}$ un modèle entier de $\mathcal{E}$. La réduction modulo ω de $\mathcal{J}$ est un idéal de $\mathcal{D}_{X,k}$ que l'on note I. L'exposant de I_x est le couple $(N_k(\mathcal{I}), \overline{N}_k(\mathcal{I}))$. Le $\mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}$-module $E = \mathcal{D}_{\mathcal{O}_{X,x},k}/I_x$ est isomorphe à $\mathcal{E}_x \otimes \kappa$. Si $\mathcal{E} \neq 0$, alors $\mathcal{E}_x \otimes \kappa \neq 0$ pour au moins un x. D'après les formules 3 et l'inégalité de Bernstein, on a

$$\operatorname{Car}(\mathcal{E}_x \otimes \kappa) = \begin{cases} t \cdot \xi_k = 0 & \text{si} \quad N_k(\mathcal{I}) \neq 0 \quad et \quad \overline{N}_k(\mathcal{I}) \neq 0 \\ \xi_k = 0 & \text{si} \quad N_k(\mathcal{I}) = 0 \\ t = 0 & \text{si} \quad \overline{N}_k(\mathcal{I}) = 0 \end{cases}$$

La variété caractéristique de $\mathcal{E}_x \otimes \kappa$ est donc de dimension 1. Si $\mathcal{E} \neq 0$, on en déduit que $\dim \operatorname{Car}(\mathcal{E}) = 1$ et $\mathcal{E}$ est holonome. Réciproquement, on verra plus tard que tout module holonome est de cette forme.

Proposition 3.17. *Soit* $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$ *une suite exacte de* $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-*modules holonomes. Alors* $\mathrm{CC}(\mathcal{N}) = \mathrm{CC}(\mathcal{M}) + \mathrm{CC}(\mathcal{L})$. *Autrement dit les multiplicités s'additionnent.*

Démonstration. La proposition 3.3 nous assure que $\operatorname{Car} \mathcal{N} = \operatorname{Car} \mathcal{M} \cup \operatorname{Car} \mathcal{L}$. Elle nous dit aussi que si $C \in I(\operatorname{Car} \mathcal{N})$ (ensemble des composantes irréductibles de $\operatorname{Car} \mathcal{N}$), alors $C \in I(\operatorname{Car} \mathcal{M})$ ou $C \in I(\operatorname{Car} \mathcal{L})$ et que $m_C(\mathcal{N}) = m_C(\mathcal{M}) + m_C(\mathcal{L})$. On suppose $\mathcal{M}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}$ non nuls. Autrement dit $\dim \operatorname{Car} \mathcal{N} = \dim \operatorname{Car} \mathcal{M} = \dim \operatorname{Car} \mathcal{L} = 1$ et toutes les composantes irréductibles sont de dimension un d'après l'inégalité de Bernstein.

Soit I une composante irréductible de $\operatorname{Car} \mathcal{M}$ (ou de $\operatorname{Car} \mathcal{L}$). Alors I est un fermé irréductible de $\operatorname{Car}(\mathcal{N})$ de dimension maximale $1 = \dim \operatorname{Car} \mathcal{N}$: C est donc une composante irréductible de $\operatorname{Car}\mathcal{N}$. Ainsi $I(\operatorname{Car}\mathcal{N}) = I(\operatorname{Car}\mathcal{M}) \cup I(\operatorname{Car}\mathcal{L})$. L'égalité des cycles en découle puisqu'alors les multiplicités s'additionnent d'après 3.3. $\square$

Remarque 3.18. *En général, si la dimension des variétés caractéristiques n'est plus un, une composante irréductible de* $\operatorname{Car}\mathcal{L}$ *ou de* $\operatorname{Car}\mathcal{M}$ *n'est pas toujours une composante irréductible de* $\operatorname{Car}\mathcal{N}$*. Les multiplicités ne s'additionnent donc pas dans la catégorie des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules cohérents.*

On rappelle que X est une courbe quasi-compacte. Alors le fibré cotangent T^*X est quasi-compact et noethérien. La variété caractéristique de tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent a donc un nombre fini de composantes irréductibles et un nombre fini de multiplicités. Puisque les multiplicités sont additives et puisqu'un module dont les multiplicités sont nulles est nul, tout module holonome va être de longueur finie.

Proposition 3.19. *Tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome est de longueur finie, inférieure à la somme de toutes ses multiplicités.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. Sa variété caractéristique a un nombre fini de composantes irréductibles et $\mathcal{E}$ n'a qu'un nombre fini de multiplicités. Puisque $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$ est noetherien, il suffit de montrer que toute suite décroissante $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules de $\mathcal{E}$ est stationnaire. On suppose que $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}_n$ est inclus dans $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_n$ est holonome. On considère la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{E}_n \longrightarrow \mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1} \longrightarrow 0$$

de modules holonomes. Les multiplicités de $\mathcal{E}_n$ sont la somme de celles de $\mathcal{E}_{n+1}$ et de $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1}$. En particulier les suites des multiplicités sont décroissantes. Elles sont donc stationnaires à partir d'un certain rang n_0 puisqu'il n'y a qu'un nombre fini fixé de multiplicités (donné par le nombre de multiplicités de $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0$). Alors pour tout $n \geq n_0$, les multiplicités de $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1}$ sont nulles par additivité. Autrement dit $\mathcal{E}_n/\mathcal{E}_{n+1} = 0$ par l'inégalité de Bernstein. Donc $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_{n+1}$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi $\mathcal{E}$ est de longueur finie inférieure à la somme de ses multiplicités. $\square$

Le théorème suivant de Stafford, énoncé initialement pour les algèbres de Weyl, implique que tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome est monogène. La preuve étant élémentaire, on en redonne une démontrée dans [5], partie 4.

Théoreme 3.20 (Stafford)**.** *Soit R un anneau simple de longueur infinie en tant que R-module à gauche. Alors tout R-module de longueur finie est monogène.*

Démonstration. Soit M un R-module de longueur finie. On commence par démontrer que M est engendré par deux éléments α et β par récurrence sur la longueur ℓ de M. Si $\ell = 1$, alors M est simple et donc engendré par un élément. Soit $\alpha \in M\backslash\{0\}$. Si $M \neq R \cdot \alpha$, alors $M/R\alpha \neq 0$. Puisque $\ell(M/R\alpha) < \ell$, l'hypothèse de récurrence implique que $M/R\alpha$ est engendré par un élément $\bar{\beta}$ pour un certain $\beta \in M$. Alors M est engendré par α et β en tant que R-module : $M = R\alpha + R\beta$. On suppose dans la suite que $R\alpha \neq R\beta$. Pour toute paire d'éléments (x, y) de M, on note

$$\ell(x, y) = (\ell(R/y), \ell((Rx + Ry)/Rx)) \in \mathbb{N}^2$$

On dit que $(x', y') < (x, y)$ si $\ell(x', y') < \ell(x, y)$ pour l'ordre lexicographique. On suppose que pour tout $(\alpha', \beta') < (\alpha, \beta)$, il existe $\gamma' \in M$ tel que $R\alpha' + R\beta' = R\gamma'$.

Puisque $\ell(R) = +\infty$, $L(\alpha) = \mathrm{Ann}_R(\alpha) \neq 0$ (l'application $R \to R\alpha$, $a \mapsto a\alpha$ n'est pas injective car $\ell(R\alpha) < \infty$). On se fixe un élément $f \in L(\alpha)\backslash\{0\}$. Comme R est simple, on peut trouver des éléments $s_1, \ldots, s_m, r_1, \ldots, r_m \in R$ tels que $1 = \sum_{i=1}^m s_i \cdot f \cdot r_i$.

S'il existe $x \in L(\alpha)$ et $y \in L(\beta)$ tels que $1 = xr + y$ pour un certain $r = r_i$, alors M est engendré par un élément. En effet $\beta = (xr + y)\beta = xr\beta = x(\alpha + r\beta)$ car $y\beta = x\alpha = 0$ et $\alpha = (\alpha + r\beta) - r\beta$. Ainsi $\alpha, \beta \in R \cdot (\alpha + r\beta)$ et $M = R\alpha + R\beta = R \cdot (\alpha + r\beta)$. On considère maintenant le cas où $R \neq L(\alpha) + L(\beta) \cdot r_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Puisque $\sum_{i=1}^m s_i \cdot f \cdot r_i = 1$, on a $\sum_{i=1}^m R \cdot f \cdot r_i = R$ et $\sum_{i=1}^m R \cdot fr_i\beta = R\beta$. Comme $R\alpha \neq R\beta$, il existe un $r = r_i$ tel que $R \cdot fr\beta \not\subset R\alpha$.
L'inclusion stricte $L(\beta) + R \cdot fr \subset L(\beta) + L(\alpha) \cdot r \subsetneq R$ implique

$$R \cdot fr\beta \simeq (L(\beta) + R \cdot fr)/L(\beta) \subsetneq R/L(\beta) \simeq R\beta$$

Autrement dit $(\alpha, fr\beta) < (\alpha, \beta)$. Par hypothèse il existe $\gamma' \in M$ tel que $R\gamma' = R \cdot fr\beta + R\alpha$. Puisque $R \cdot fr\beta \not\subset R\alpha$, $R\alpha \subsetneq R\gamma'$. On en déduit que

$$\ell((R\gamma' + R\beta)/R\gamma') = \ell((R\alpha + R\beta)/R\gamma') < \ell((R\alpha + R\beta)/R\alpha)$$

Ainsi $(\gamma', \beta) < (\alpha, \beta)$. A nouveau par hypothèse il existe $\gamma \in M$ tel que

$$R\gamma = R\gamma' + R\beta = R\alpha + R\beta = M$$

Cet élément γ engendre M en tant que R-module. □

Corollaire 3.21. *Tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome est monogène.*

Démonstration. Soit (U_i) un recouvrement affine de $\mathfrak{X}$ et $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. Les algèbres $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_i)$ sont simples par la proposition 2.9. Elles sont aussi de longueurs infinies (à gauche et à droite). En effet soit (t, ∂) un système de coordonnées locales sur U_i. La suite $\left(\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_i) \cdot (\omega^k \partial)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroisante puisque $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_i)$ est intègre (la norme $\|\cdot\|_k$ est multiplicative).

D'après la proposition 3.19, les modules $\mathcal{E}(U_i)$ sont de longueurs finies car $\mathcal{E}$ est holonome. Le théorème 3.20 assure alors l'existence d'éléments $u_i \in \mathcal{E}(U_i)$ tels que $\mathcal{E}_{|U_i} =$

$\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_i,k,\mathbb{Q}} \cdot u_i$. On a $\mathcal{E}_{|U_i \cap U_j} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_i \cap U_j,k,\mathbb{Q}} \cdot u_i = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{U_i \cap U_j,k,\mathbb{Q}} \cdot u_j$. On en déduit que u_i et u_j diffèrent d'un élément inversible de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U_i \cap U_j)$. Les u_i se recollent donc en une section globale u de $\mathcal{E}$ vérifiant $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot u$. □

Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module holonome. Il est monogène donc engendré par un élément u. On pose $\mathcal{I} = \mathrm{Ann}_{\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}}(u)$. C'est un idéal cohérent non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$. Autrement l'application $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-linéaire $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \to \mathcal{E}$, $P \mapsto P \cdot u$ serait injective et $\mathcal{E}$ serait aussi de longueur infinie. Ainsi $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal $\mathcal{I}$ non nul. Réciproquement, on a vu que tout $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent de la forme $\mathcal{E} = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$, où $\mathcal{I}$ est un idéal non nul, est holonome. On peut maintenant énoncer plusieurs caractérisations des $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-modules holonomes.

Proposition 3.22. *Soit $\mathcal{E}$ un $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$-module cohérent. Les points suivants sont équivalents :*

1. *$\mathcal{E}$ est holonome.*
2. *$\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ pour un idéal non nul $\mathcal{I}$ de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}$.*
3. *$\mathcal{E}$ est de longueur finie.*
4. *$\mathcal{E}$ est de torsion : pour tout ouvert affine U de $\mathfrak{X}$ et pour toute section $m \in \mathcal{E}(U)$, il existe $P \in \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ non nul tel que $P \cdot m = 0$.*

Démonstration. Les deux premiers points sont équivalents. D'après le théorème de Stafford et le corollaire 3.21, le point 3 est équivalent aux premiers.

On suppose maintenant $\mathcal{E}$ de longueur finie. Soit U un ouvert affine de $\mathfrak{X}$ et $(P \mod \mathcal{I}(U))$ un opérateur non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)/\mathcal{I}(U)$. Puisque $\mathcal{E}(U)$ est de longueur finie et $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ est de longueur infinie, l'application $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U) \to \mathcal{E}(U)$, $Q \mapsto Q \cdot (P \mod \mathcal{I}(U))$ n'est pas injective. Ainsi $(P \mod \mathcal{I}(U))$ est annulé par un élément non nul de $\widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}(U)$ et $\mathcal{E}$ est de torsion.

Réciproquement on suppose $\mathcal{E}$ de torsion. On se ramène au cas où $\mathfrak{X}$ est affine en considérant un recouvrement affine fini de $\mathfrak{X}$. Comme $\mathcal{E}$ est cohérent, $\mathcal{E}$ est engendré par des sections globales $m_1, \ldots, m_r$. On démontre par récurrence sur r que $\mathcal{E}$ est holonome. Si $r = 1$, alors $\mathcal{E} \simeq \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}}/\mathcal{I}$ où $\mathcal{I}$ est l'idéal annulateur de m_1. Il est non nul car m_1 est de torsion et donc $\mathcal{E}$ est holonome. Sinon par hypothèse de récurrence, $\mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot m_2 + \cdots + \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot m_r$ est de longueur finie. Puisque $\mathcal{E}/\mathcal{E}' = \widehat{\mathcal{D}}^{(0)}_{\mathfrak{X},k,\mathbb{Q}} \cdot \overline{m_1}$ est aussi de longueur finie, $\mathcal{E}$ est forcément de longueur finie. □

Références

[1] Pierre Berthelot. Introduction à la théorie arithmétique des $\mathcal{D}$-modules. *Astérisque*, 279 :1–80, 2002.

[2] Laurent Garnier. Théorèmes de division sur $\widehat{D}^{(0)}$ et applications. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 123(4) :547–589, 1995.

[3] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic structures for differential operators on formal schemes. *Nagoya Mathematical Journal*, 243 :157–204, 2021.

[4] Christine Huyghe, Tobias Schmidt, and Matthias Strauch. Arithmetic differential operators with congruence level structures : First results and examples. *Journal of Number Theory*, 237 :332–352, 2022.

[5] Anton Leykin. Algorithmic proofs of two theorems of stafford. *Journal of Symbolic Computation*, 38, 2002.

[6] Philippe Maisonobe. *Germes de $\mathcal{D}$-modules à une variable et leurs solutions, dans Introduction à la théorie algébrique des systèmes différentiels p.97-146*, volume Travaux en cours 34. Hermann, 1988.