La Philosophie des mathématiques dans son histoire de l'Antiquité à la période moderne

Sébastien Maronne, David Rabouin

La philosophie des mathématiques dans son histoire de l'Antiquité à la période moderne

Sébastien Maronne* et David Rabouin†

À paraître dans Andrew Arana et Marco Panza,
Précis de philosophie de la logique et des mathématiques,
Vol. 2 : philosophie des mathématiques,
Paris, Éditions de la Sorbonne, Chapitre 1, p. 4-47.

1 Introduction

Il est courant de tenir la philosophie des sciences en général, et la philosophie des mathématiques en particulier, pour des disciplines relativement récentes. Bien sûr, il ne s'agit pas d'avancer que les philosophes ont attendu la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle pour se préoccuper de mathématiques. Chacun a en mémoire les développements que Platon, Aristote, Descartes, Leibniz ou Kant ont pu consacrer à cette science. Ces grands noms sont d'ailleurs régulièrement mentionnés pour rappeler l'importance d'une réflexion sur les mathématiques pour quiconque entreprend de faire œuvre de philosophie. Reste que ces passages sont insérés dans des développements philosophiques généraux, typiquement des questions plus vastes concernant la nature de la connaissance, et ne sont pas séparés en tant que tels, comme pourrait l'être, dès l'Antiquité grecque, un développement éthique ou politique, voire une réflexion de philosophie naturelle [1].

Mais il y a plus : les questions qui préoccupent ces philosophes en ce qui touche aux mathématiques, au moins en première approche, sont elles aussi très générales et relativement déconnectées de la pratique des mathématiciens. Elles ont souvent trait au statut des entités qu'ils manipulent, à la nature des jugements qu'ils portent sur elles et à leur vérité. Or, que l'on considère un cercle comme l'image d'une entité idéale ou que l'on considère qu'il soit obtenu par abstraction à partir d'entités sensibles, que l'on considère que Dieu a créé les vérités mathématiques ou qu'il y soit soumis, que l'on considère « 7 + 5 = 12 » comme une proposition analytique

*Institut de Mathématiques de Toulouse, UMR 5219. Université de Toulouse, CNRS. *E-mail* : smaronne@math.univ-toulouse.fr

†Laboratoire SPHERE, UMR 7219. CNRS-Université de Paris. *E-mail* :david.rabouin@wanadoo.fr

1. Pensons, en ce qui concerne les auteurs cités, au *Timée* de Platon, à la *Physique* d'Aristote, aux *Principes de la philosophie* de Descartes et à leur commentaire par Leibniz, ou encore aux *Principes métaphysiques des sciences de la nature* de Kant.

ou synthétique [2], cela laisse le mathématicien relativement libre dans ses démonstrations et dans la détermination de ses problèmes. De ce point de vue, on pourrait accorder qu'un changement s'est opéré au XIXe siècle quand il s'est agi de développer des mathématiques plus « rigoureuses » et que le rôle de « l'intuition » est devenu non seulement un sujet de discorde, mais le point d'appui pour le développement de nouvelles *pratiques*. Ce tournant est lié à ce qu'on désigne souvent comme l'émergence de la question des « fondements » [3]. De fait, il est clair que les grands courants de philosophie des mathématiques tels qu'ils se cristallisent au début du XXe siècle (comme l'intuitionnisme, le conventionnalisme, le formalisme, le structuralisme ou le logicisme) semblent inséparables de manières spécifiques de *faire* des mathématiques — ce qui charge d'ailleurs les étiquettes anciennes, comme celle de « platonisme » ou d'« aristotélisme » de sens assez différents de ce qu'elles pouvaient signifier dans les périodes antérieures.

Pourtant l'image qui précède s'avère, à l'étude, très grossière. Elle semble même avoir contribué à couper la philosophie des mathématiques d'une partie de son histoire. D'un côté, on n'aurait pas de mal à trouver un corpus assez vaste de philosophie des mathématiques spécialisé depuis la plus haute Antiquité, corpus qui se développe sans solution de continuité jusqu'au XIXe siècle. Les commentaires aux grands traités mathématiques d'Euclide, Archimède ou Apollonius en fournissent le prototype ancien (sur cette littérature, voir section 3 ci-dessous). Ajoutons que nos « grands philosophes » y auront aussi leur place. Si Descartes est l'auteur des *Méditations métaphysiques*, il l'est aussi des *Règles pour la direction de l'esprit* ; si Pascal a écrit les *Pensées*, on lui doit également l'opuscule *De l'esprit géométrique* ; si Kant a écrit la *Critique de la Raison pure*, il est aussi l'auteur de l'*Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeur négative*, etc.

D'un autre côté, il existe de nombreux débats internes aux mathématiques qui mettent les réflexions des philosophes en prise directe avec la pratique et ce, à nouveau, dès l'Antiquité grecque. S'il semble mathématiquement indifférent de considérer un cercle comme une entité idéale ou comme une fiction, il ne l'est pas de considérer une démonstration comme acceptable ou non (par exemple, si elle procède par l'absurde ou par la superposition de deux figures) ou de considérer un objet comme une grandeur ou non (par exemple l'angle que fait la tangente avec le cercle, dit « angle de contact » ou « de contingence »). Le but de ce chapitre sera de sensibiliser le lecteur à la richesse de cette histoire sur laquelle nous ne pourrons donner, faute de place, qu'un aperçu.

Il ne s'agira pas, pour autant, de faire, selon l'expression de Nietzsche, œuvre d'antiquaires [4]. Par-delà ce qui peut relever de la fidélité historique, il s'agit plutôt d'enrichir des questionnements qui, à se couper de leur passé, ont pu parfois s'appauvrir. Sous ce point de vue, il est remarquable qu'une partie de la philosophie des mathématiques actuelle se soit progressivement détournée de l'orientation dessinée par les grands courants « fondationnalistes » de la fin du XIXe siècle, dont les questions paraissaient finalement trop éloignées de la pratique des mathématiciens au

2. Sur ces distinctions kantiennes, voir le chapitre 2.

3. Sur les différentes approches « fondationnelles » qui se développent après Kant, voir les chapitres 2 et 3.

4. Nietzsche (1988).

travail, et ait ainsi retrouvé nombre de questions posées dans les siècles antérieurs [5]. Non moins remarquable est le fait que des philosophes attentifs à l'histoire des mathématiques de l'Antiquité grecque à l'Âge classique aient joué un rôle moteur dans ce développement [6].

Mais il est un autre intérêt à raviver la connaissance de l'histoire de la philosophie des mathématiques dans sa richesse et sa diversité. C'est, en effet, un bon moyen pour défaire l'évidence d'une vision aussi répandue qu'injustifiée qui voudrait que telle ou telle pratique mathématique aille *nécessairement* avec telle ou telle interprétation philosophique, et réciproquement — un rêve auquel nombre de commentateurs philosophes ont malheureusement succombé, comme s'il s'agissait simplement d'extraire la « substantifique moëlle » philosophique de certaines pratiques mathématiques. Ce qui peut être vrai pour les questions fondationnelles ne l'est pas, en effet, pour d'autres questions plus spécialisées portant sur la nature des hypothèses, les moyens légitimes pour élaborer une démonstration ou le statut d'entités spécifiques entrant dans les preuves. Le premier fait auquel nous confronte l'histoire de la philosophie des mathématiques est ainsi un ensemble de discussions aux thèses variées portant souvent *sur une même pratique* — et réciproquement, différentes pratiques donnant lieu à une *même intuition philosophique*.

On verra ainsi dans notre section 3 que, contrairement à une légende tenace, la pratique euclidienne a été depuis l'Antiquité l'objet de débats et de désaccords sur à peu près *tous* ses aspects : nature des axiomes, nature des preuves, statuts de certains objets, rôle du mouvement, etc. Mais on peut également penser aux « méthodes des indivisibles », que nous aborderons dans notre section 5 : elles se développent, en effet, chez des auteurs dont les pratiques se ressemblent beaucoup, mais qui n'accordent pourtant pas du tout le même statut aux entités concernées (selon, notamment, qu'ils considèrent les « indivisibles » comme hétérogènes ou homogènes aux quantités dont ils cherchent à trouver les quadratures) [7]. Symétriquement, il est tout à fait possible de suivre certaines options philosophiques sur le long court, comme celle qui estime qu'une construction des objets est une condition de leur existence et/ou de leur disponibilité — conception qu'on retrouverait sans peine, quoique sous des formes évidemment variées, aussi bien dans l'Antiquité qu'aux périodes modernes. Nous reviendrons également sur cet aspect dans les sections qui suivent.

La chose est d'importance pour saisir un phénomène répandu dans l'histoire de

5. Cette sensibilité a toujours été très présente en France où une certaine méfiance à l'égard des questions fondationnelles (pensons à la figure de Poincaré) ainsi que l'attention à l'histoire (pensons à la figure de Léon Brunschvicg, suivie par celle de Jean Cavaillès et de ses héritiers) ont nourri les réflexions sur les mathématiques. Reste que ce courant était, pendant longtemps, minoritaire et n'a connu un regain d'intérêt à l'échelle internationale que récemment, dans le cadre d'un épuisement de certains questionnements et du désir d'un retour à la pratique. On pense, en particulier, au courant dit de la « philosophie de la pratique mathématique » qui s'est exprimé par une série de publications dans la décennie précédente comme Grosholz et Breger (2000) ; Van Kerkhove et Van Bendegem (2007) ; Mancosu (2008) ; Van Kerkhove *et al.* (2010). Sur ce nouveau courant, voir Panza (2011a).

6. Voir notamment Mancosu (1999) qui annonçait ce renouveau à partir des recherches sur l'âge classique.

7. La question philosophique sous-jacente est bien évidemment celle de la « composition » du continu. Elle enveloppe avec elle la possibilité de reconnaître des grandeurs « non-archimédiennes ».

la philosophie des mathématiques : son déphasage fréquent avec l'évolution et de la philosophie et des mathématiques. Cette remarque est cruciale pour bien apprécier le développement de la philosophie des mathématiques dans certains moments de renouvellement profond de l'une et de l'autre, où l'on serait tenté d'établir des rapports d'influence directe des mathématiques à la philosophie, et réciproquement, alors qu'il n'y en a pas. Ainsi le XVII^{e} siècle, qui tiendra une place de premier plan dans ce chapitre, voit-il l'essor sans précédent de pratiques mathématiques nouvelles (algèbre symbolique, géométrie perspective, calcul différentiel, calcul des probabilités. . .). Or si ces pratiques suscitent des discussions nourries, nombre de commentaires rétrospectifs n'en portent pas moins à faux en projetant sur ces développements un changement concomitant des débats philosophiques. D'une part, comme on le verra, les débats anciens gardent une place centrale (voir section 4) [8] ; de l'autre, certaines questions projetées sur la pratique s'avèrent de pures reconstructions. Ainsi l'acceptabilité d'entités comme les nombres négatifs, qu'on lie volontiers à l'émergence de l'algèbre symbolique, ne lui semble pas concomitante. On n'en trouve pas trace chez Viète, Stevin ou Descartes, pourtant grands promoteurs de cette nouvelle mathématique, et elle n'apparaît qu'à la fin du siècle chez des auteurs comme Arnaud et Prestet (voir section 5).

Étant donné l'ampleur de la période couverte dans ce chapitre introductif, il était exclu de donner une vue exhaustive de tous les débats et arguments de philosophie des mathématiques qui ont pu se développer jusqu'au début du XVIII^{e} siècle. Nous avons donc choisi de procéder de manière sélective : après un rapide rappel sur la richesse des débats de philosophie des mathématiques dans la Grèce antique (section 2), nous nous concentrerons sur les commentaires plus tardifs, et plus particulièrement sur celui de Proclus de Lycie, philosophe néoplatonicien du V^{e} siècle de notre ère (section 3). La raison de ce choix est simple : Proclus est notre principal témoignage sur nombre de débats qui l'ont précédé, mais il est également une source centrale pour nombre d'auteurs postérieurs [9]. Dans un second temps, nous nous porterons alors vers la Renaissance et l'Âge classique, période de relecture des commentaires anciens et de grand foisonnement de réflexions épistémologiques sur les mathématiques. On l'a divisé en deux moments selon que ces réflexions s'inscrivaient ou non dans un changement des pratiques. Ainsi la section 4 insistera-t-elle plus sur l'existence d'un corpus spécialisé de philosophie des mathématiques, tandis que la sections 5 portera plus sur les liens variés qui peuvent être faits avec la pratique mathématique. Un tel panorama est nécessairement très partiel et apparaîtra même particulièrement injuste à l'égard des périodes médiévales, qu'elles soient latines, arabes ou indiennes. Faute de place, nous nous sommes résolus à cette répartition en tentant compte du fait que nombre de débats médiévaux (mais certainement pas tous !) ou bien se situent dans l'héritage du questionnement aristotélicien et néoplatonicien, ou bien ont des prolongements dans les périodes modernes qui permettent

8. Sur la continuité importante entre Renaissance et Âge classique en termes de philosophie des mathématiques, voir (Mancosu, 1996, chap. 1).

9. Voyez par exemple la déclaration de M.O. Helbing : « De Commandino à Clavius, à Mazzoni, à Pierre de la Ramée, à Kepler, à Scheiner, à Torricelli, à Saccheri, il est presque difficile de trouver un savant qui ignore les *Commentaires de Proclus sur le premier livre des Éléments d'Euclide* » (Helbing, 2000, p. 174). Voir également Rabouin (2010).

de les mentionner à cette occasion. Une étude plus complète exigerait néanmoins de donner toute sa place aux développements de ces périodes dont l'importance a été récemment mieux appréciée [10].

2 Richesse des débats de philosophie des mathématiques dès l'Antiquité grecque classique

Si Aristote se réfère à de nombreuses reprises, comme Platon avant lui, à des exemples mathématiques, il est remarquable qu'il ait également consacré deux livres spécifiques de la *Métaphysique* à des discussions centrées sur la philosophie des mathématiques [11]. Il s'agit là du premier exemple connu de traitement propre à ce domaine [12]. Bien plus, c'est dans ce cadre qu'est mise en scène l'opposition entre un idéalisme « platonicien » et un abstractionnisme « aristotélicien », ainsi que la caractérisation d'une troisième position, « pythagoricienne », défendant la nature intrinsèquement mathématique du réel.

Peu d'informations nous seraient préservées sur ce « pythagorisme » mathématique ancien sans Aristote, mais en ce qui concerne Platon également, force est de remarquer qu'on trouverait difficilement dans son œuvre le déploiement d'*une* philosophie des mathématiques bien délimitée. Même si le terme « platonisme » s'est imposé depuis pour désigner une doctrine posant l'existence d'entités idéales servant de référents au discours mathématique, nous ne devons pas oublier que les mathématiques ne sont pas présentées à ce titre dans la fameuse analogie de la « ligne » exposée dans *La République* (VI, 509c-511e). Elles n'y occupent pas, en effet, la même position que les Idées, mais un rang inférieur — « intermédiaire » dira Aristote [13] —, référé à l'usage de la connaissance discursive (*dianoia*, par différence avec la visée intellectuelle ou *nous* qui se rapporte aux idées). Bien plus, Platon y insiste sur le fait que les mathématiciens doivent se référer aux idées de manière hypothétique, et non à la manière de principes. Enfin, ils doivent, pour y accéder, passer par la médiation de représentations sensibles (510b-e). S'il paraît donc clair que le mathématicien se réfère indirectement, pour Platon, à un objet idéal, il faut garder à l'esprit que la question du statut des entités auquel il se réfère directement (les objets mathématiques) reste donc très largement ouverte [14].

D'après ce que nous en dit Aristote, une évolution décisive eut lieu avec les premiers disciples de Platon qui ou bien refusait tout simplement l'existence des Idées,

10. Voir, en France, les travaux de Roshdi Rashed, et en particulier Rashed (2002), ainsi que le compte-rendu par Michel (2003). Pour la période médiévale latine, cf. Murdoch (1962), Murdoch (1969), Biard et Celeyrette (2005).

11. Il s'agit des livres *M* et *N*. On sait que la *Métaphysique* désigne un ouvrage rassemblant des leçons d'Aristote, mais dont la composition d'ensemble est plus tardive. En pointant ces deux « livres », c'est donc sur la spécificité des leçons sous-jacentes que nous voulons insister.

12. Il n'est pas impossible qu'Aristote ait en cela suivi le modèle donné par certains platoniciens comme Speusippe et Xénocrate (cf. Merlan (1960)), mais les indications en ce sens restent hypothétiques et dépendantes du témoignage d'Aristote lui-même.

13. Cette théorie des « intermédiaires » est attribuée par Aristote à Platon lui-même, par exemple en *Métaphysique* A 6, 987 b 15 sq.

14. Sur la difficulté à isoler une vue unifiée de Platon sur les mathématiques, voir (Panza et Sereni, 2013, chapitre 1.1).

ou bien les identifiaient aux objets mathématiques [15]. Contre ces vues, le Stagirite développe une argumentation serrée contre la subsistance d'entités réellement séparées du sensible en montrant les absurdités qui en découlent d'après lui. Il plaide, pour sa part, pour une conception où le mathématicien sépare, par « abstraction », des entités qui ne sont pas séparées dans la réalité [16]. On prendra garde à ce que cette position « abstractionniste » n'enveloppe pas nécessairement, comme on y sera habitué par la suite, une forme d'ancrage empirique des mathématiques [17]. Ainsi Aristote répond-il d'avance à nombre d'objections qui lui seront faites lorsqu'il accorde qu'on ne trouve dans la nature ni ligne droite, ni cercle parfait [18]. L'abstraction (*a-phairesis*) consiste, *stricto sensu*, à « séparer » des attributs, elle ne suppose pas que ces attributs correspondent à des traits sensibles perçus comme tels [19] et reste assez ouverte sur les modalités précises de leur existence. Mais Aristote ne relie pas non plus clairement cette opération à une activité créatrice de l'esprit, qui viendrait comme surajouter des déterminations à ce qui existe dans la réalité. S'il lui arrive de présenter à l'occasion certains objets mathématiques comme dépendant de la *psuchè* [20], ces passages sont rares et une interprétation de type réaliste reste possible [21]. Enfin, il faut bien prendre garde qu'Aristote n'a jamais avancé, contrairement à ce qu'on lui fait souvent dire, que *tous* les objets mathématiques étaient obtenus par abstraction. Il insiste notamment sur le fait que les éléments constituants d'une définition (et donc d'une essence) ne sont pas la même chose que les parties d'une entité, si bien qu'un objet comme le demi-cercle est défini à partir du cercle comme sa moitié (et non par abstraction). En prenant en compte le fait que le point, la ligne ou la surface peuvent être définis comme limites (d'une ligne, d'une surface ou d'un corps respectivement), les figures géométriques pouvant ensuite elles-mêmes être définies à partir des lignes et des surfaces, on voit qu'on peut récupérer la plupart des objets mathématiques en ne supposant un processus d'abstraction que dans des situations bien délimitées, par exemple au seul niveau de la perception des corps mésoscopiques qui nous entourent.

Quoi qu'il en soit de ces subtilités qui ont nourri, et continuent de nourrir, les débats sur la philosophie des mathématiques aristotélicienne [22], nous trouvons as-

15. Le livre *M* s'ouvre sur ces questions en isolant trois positions du rapport entre Idées et objets mathématiques selon qu'on considère qu'il s'agit de deux genres de substances différents, ou bien d'un seul genre, voire qu'on n'accorde l'existence qu'au second. On associe, par d'autres passages, ces différentes thèses à Platon, Xénocrate et Speusippe respectivement.

16. *M* 3, 1078a20-30.

17. Comme y a insisté Ian Mueller, cette lecture « empiriste » est typique des commentateurs tardifs et, en particulier, d'Alexandre d'Aphrodise (Mueller (1990)).

18. Voyez le passage sur Protagoras en *Métaphysique* α 998a.

19. C'est ce qu'Aristote paraît soutenir en mettant notamment en regard abstraction (*a-phairesis*) et *addition* (*pros-thesis*).

20. En particulier lorsqu'il se demande s'il pourrait y avoir du temps, comme nombre du mouvement, sans âme, *Physique* IV, 14 223 a. Mais *Physique* 193b dit clairement que l'activité de l'âme ne change rien à l'affaire. Cela semblé lié au fait que les objets mathématiques existent, pour Aristote, « en puissance ». Ils peuvent donc être présents « dans les choses », si l'on peut dire, sans être perçus comme tels et avant toute actualisation dans telle ou telle pensée.

21. Voir notamment l'interprétation donnée dans Annas (1987). En fonction de l'importance qu'on donnera aux passages où Aristote nie que les objets mathématiques puissent se trouver dans la nature, ce réalisme pourra donc avoisiner des formes modernes de « platonisme ».

22. Pour une défense récente de l'abstractionnisme aristotélicien, on pourra consulter Pettigrew

surément chez Aristote la première mise en scène d'un débat de philosophie des mathématiques qui se perpétue sous des formes diverses jusqu'à nous, la grande question étant de savoir si nous accordons aux entités mathématiques le statut d'entités à part, « séparées ». Ceci donne, par ailleurs, un contexte intéressant pour lire de nombreux passage où le Stagirite s'intéresse, d'un point de vue normatif, à des éléments précis de la pratique mathématique. Ainsi objecte-t-il aux platoniciens de vouloir trouver des principes universels des mathématiques sans se rendre compte que l'unité des mathématiques n'est pas donnée dans un objet univoque séparé et que ces principes n'ont d'effectivité que dans le cadre de théories qui, quant à elles, s'appliquent toujours à tel ou tel genre d'objets (*a minima* le nombre ou la grandeur cf. *M* 2, 1077 a 10-14). Par le même type d'argument, il rejette des pseudo-preuves comme celle du sophiste Bryson, qui passent subrepticement d'un genre d'objets à un autre (*An. Post.* 75b-76a). En d'autres occasions, il insiste sur le fait que les mathématiciens n'ont pas besoin d'un infini actuel (*Physique* III, 207b 31-34). Tous ces éléments, et bien d'autres, s'accordent remarquablement avec ce que nous pouvons connaître de la pratique des mathématiciens comme Euclide, Archimède, Apollonius et servent de support à autant d'objections contre les vues des platoniciens. Il ne s'agit donc pas simplement de prendre position sur la nature des objets et de la connaissance mathématiques, mais aussi, dès Aristote, de s'appuyer sur une certaine pratique pour tirer des arguments philosophiques sur l'unité du savoir, la nature des démonstrations ou le statut de l'infini [23].

De cette entrée en matière, on pourrait néanmoins retenir l'impression que la « philosophie des mathématiques » relève d'une tradition très particulière, disons celle qui se déploie dans le périmètre du triangle pythagorisme–platonisme–aristotélisme. Or nous devons prendre garde que cette impression est un effet de la mise en scène aristotélicienne elle-même. Ceci rejoint un avertissement sur lequel a insisté l'historien des mathématiques antiques Reviel Netz : que Platon et Aristote soient des grands philosophes de l'Antiquité grecque ne doit pas nous faire oublier non seulement que les mathématiques ne semblent pas avoir tenu la place qu'ils leur attribuaient dans la culture grecque antique, mais aussi que les autres écoles philosophiques (Épicuriens, Stoïciens, Cyniques, Sceptiques..) ne les suivaient pas nécessairement dans leur appréciation (Netz (1999)). Il faut donc se garder des généralités sur le rapport des « Grecs » aux mathématiques et aux questionnements philosophiques qui pourraient s'en nourrir.

Reste que cette mise en garde salutaire ne doit pas conduire, par différence, à limiter ce qui se déploie de philosophie des mathématiques dans l'Antiquité grecque à ce qui s'ouvre avec Aristote discutant Platon. On trouve ainsi chez Aristote et Platon eux-mêmes de nombreux témoignages sur plusieurs Sophistes (Antiphon, Bryson, Hippias d'Elis, Théodore de Cyrène) [24] qui avaient des compétences en mathéma-

(2009), dans lequel on trouvera également une abondante bibliographie sur la question.

23. On prendra garde, néanmoins, à ce que les déclarations d'Aristote restent des interprétations et qu'il existe aussi des situations où elles se démarquent de la pratique que nous connaissons. C'est typiquement le cas dans son appréciation des arguments par réduction à l'absurde, très présents dans les mathématiques grecques classiques, et qu'Aristote considère comme inférieurs aux démonstrations directes, *cf. An. Post.* 87a.

24. Voir Mazet (1994). Diogène Laërce mentionne également un ouvrage de Protagoras intitulé *Sur les mathématiques* (*Vie et doctrine des philosophes illustres* IX, § 55).

tiques, les mettaient en avant et les discutaient. Mais on dispose également de plusieurs témoignages qui attribuent à un auteur comme Démocrite des raisonnements mathématiques à portée épistémologique qui, étant donné leur couleur matérialiste, pouvaient recevoir un accueil favorable auprès d'écoles comme celle des Épicuriens. Bien plus, la redécouverte au début du XX^e^ siècle du texte d'Archimède qu'on désigne sous le titre *La méthode* indique non seulement que ce dernier avait bien recours à certains raisonnements physiques pour parvenir à des résultats mathématiques (de quadrature), mais surtout qu'il se plaçait alors explicitement dans l'héritage démocritéen [25] — ce qui modifie très profondément l'affinité supposée de la mathématique grecque avec un cadre platonicien ou aristotélicien. Nous verrons, par ailleurs, dans la section suivante non seulement que de nombreux débats de philosophie des mathématiques paraissent remonter aux périodes classiques et héllénistiques, mais aussi qu'ils mobilisent des influences sceptiques, épicuriennes et stoïciennes notables. Tout ceci témoigne d'une grande richesse de débats autour des mathématiques dès la période classique, dont seule une petite partie semble malheureusement avoir été préservée.

3 L'ère des grands commentaires

La période qui court depuis le temps où sont élaborées les œuvres d'Euclide, Archimède et Apollonius (III^e^-II^e^ siècle avant J.-C.) jusqu'à la fin de l'Antiquité tardive (V^e^-VI^e^ siècle de notre ère) est marquée par les figures de grands commentateurs comme Théon [26], Jamblique, Pappus, Proclus ou Eutocius. L'influence de la philosophie sur leurs écrits, quoique variable d'un auteur à l'autre, est particulièrement notable et semble correspondre à l'apparition d'un nouveau type de traité.

On aurait tort de conclure qu'il ne s'agit pas, pour autant, d'une période d'intenses activités mathématiques et qu'elle se réduit à des gloses produites dans l'après coup des grands ouvrages de mathématiques classiques. Outre les développements remarquables de l'astronomie (Ptolémée est, d'après les documents existants, contemporain de Théon de Smyrne), elle compte nombre d'auteurs de première grandeur comme Héron d'Alexandrie (I^e^ siècle), Nicomaque de Gerasa (*ca.* 200), ou Diophante [27]. Par ailleurs, il ne faut pas non plus croire que les commentaires eux-mêmes sont dénués d'innovations mathématiques, comme on le voit bien chez un auteur comme Pappus [28]. Ce qui frappe, à vrai dire, est moins l'appauvrissement de l'activité mathématique que l'émergence d'une littérature d'un genre différent, dans laquelle on trouve justement côte à côte des développements mathématiques et des

25. « De ces propositions sur le cône et la pyramide, dont Eudoxe fut le premier à trouver la démonstration, en particulier des théorèmes affirmant que le cône est la troisième partie du cylindre, et la pyramide la troisième partie du prisme, qui ont même base et même hauteur, on doit attribuer une part notable à Démocrite » (trad. fr. tirée de Vitrac (2001), où l'on trouvera un état du dossier sur Démocrite mathématicien).

26. Il s'agit ici de Théon de Smyrne, à ne pas confondre avec Théon d'Alexandrie, éditeur d'Euclide.

27. Les dates de Diophante ne sont pas connues et les auteurs qu'il cite permettent seulement de le situer entre le II^e^ et le V^e^ siècles de notre ère.

28. Voir le numéro 4 de la *Revue d'Histoire des mathématiques* paru en 2004 et consacré aux textes deutéronomiques ainsi que Bernard (2003).

développements philosophiques[29].

Ainsi Nicomaque est-il à la fois une de nos sources importantes pour la philosophie néo-pythagoricienne des mathématiques[30], mais aussi pour la théorie arithmétique des nombres figurés, théorie qui jouera un rôle considérable du fait de sa transmission via l'*Institution arithmétique* de Boèce (Boèce (1995)). Mais à nouveau, on se gardera néanmoins de croire que la tradition platonico-pythagoricienne[31], quoique très vivace, soit l'unique vecteur de réflexions philosophiques sur les mathématiques et l'on ne négligera pas l'influence des autres écoles représentées par des figures comme Posidonius (via Proclus), Cléomède ou Sextus empiricus (Dye et Vitrac (2009)). On en retiendra surtout l'apparition d'un type d'ouvrage qui jouera un rôle considérable dans la circulation d'une littérature propre de philosophie des mathématiques dans les périodes postérieures[32].

Faute de place, on se concentrera ici sur un exemple particulièrement riche et central, celui du *Commentaire au premier livre des Éléments d'Euclide* par Proclus[33]. De fait, la richesse documentaire de ce texte en fait une de nos principales sources sur les débats de philosophie des mathématiques antérieurs, y compris pour les époques classiques et hellénistiques. Au premier chef, on rappellera que Proclus dit s'inspirer pour beaucoup d'une histoire des mathématiques écrite par Eudème de Rhodes, un disciple direct d'Aristote. Il renvoie également à plusieurs reprises à un ouvrage du mathématicien Eratosthène (IIIe siècle avant notre ère) intitulé *Le Platonicien* [F 43-44] et qui comportait à l'évidence des réflexions philosophiques (ce qui n'est pas le cas, rappelons-le, des oeuvres d'Euclide, Archimède et Apollonius). Enfin, il mentionne à l'occasion des positions philosophiques de mathématiciens anciens, notamment Hippocrate de Chios, Ménechme ou Apollonius. Dans ce qui suit, nous passerons en revue un certain nombre de thèmes abordés dans ce commentaire, en privilégiant ceux qui joueront un rôle structurant pour les développements futurs.

La première surprise, pour qui parcourt le traité, est de voir qu'il n'est pratiquement aucun aspect de la pratique euclidienne (mais la plupart de ces traits se transfèrent aux autres auteurs de la période héllenistique) qui n'ait pas été l'objet de critiques. Ceci concerne au premier chef la structure axiomatico-déductive des *Éléments*, pourtant présentée par nombre d'auteurs postérieurs (et ceci jusqu'à aujourd'hui) comme modèle inégalé et indisputé de certitude. Même les « axiomes » n'échappent pas à la discussion. S'il est bien connu que des débats nourris existaient déjà sur le fameux postulat V, dit « des parallèles »[34], et que leur fortune

29. Outre les commentaires, une autre source importante de réflexions épistémologiques — qui se retrouvera dans les périodes postérieures — est donnée par les préfaces aux traités. Voir par exemple, le travail de J. Feke sur Ptolémée (Feke (2018) et Mansfeld (1998)).

30. Relayé et complété par les commentaires de Jamblique et Asclepius de Tralles.

31. Théon est ainsi l'auteur d'un traité intitulé *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* (Théon de Smyrne (1892)).

32. En particulier, on notera que la Renaissance voit la publication de nombreux traités où le texte original est accompagné de son commentaire : Euclide avec Proclus, Archimède avec Eutocius (voir ci-dessous section 5).

33. Nous citons d'après l'édition Proclus (1873), que nous abrégeons [F] dans les références des citations.

34. On trouve chez Euclide des « postulats » et des « notions communes », mais Proclus nous apprend que cette distinction n'était pas consensuelle et que certains auteurs considéraient que tous les premiers principes étaient des postulats [F 181-182]. Il considérait pour sa part que le

fut considérable[35], on sait moins que des doutes étaient portés jusqu'aux « notions communes » elles-mêmes. Ce n'était pas là le fait d'obscurs philosophes ignorants puisque Proclus mentionne Apollonius lui-même comme un partisan du caractère démontrable des « notions communes » euclidiennes, pour lesquelles il avait d'ailleurs élaboré certaines preuves [F 194-195]. Héron, pour sa part, estimait que le nombre de principes non démontrés devait être réduit au minimum, réquisit que n'avait pas satisfait Euclide [F 196].

Outre les premiers principes, la structure déductive elle-même était l'objet de débats intenses, notamment en ce qui concerne la répartition entre problèmes et théorèmes[36]. D'après Proclus, en effet, certains mathématiciens — et non des moindres à nouveau puisqu'il s'agirait de Ménechme — considéraient que les mathématiques ne consistaient qu'en problèmes, tandis que d'autres, comme Speusippe, les faisaient consister en théorèmes [F 77-78] — la distinction encore active aujourd'hui entre *problem-solvers* et *theory-builders* en constitue un lointain écho.

En règle générale, Proclus a tendance à justifier la structure des *Éléments* (on lui doit d'ailleurs la description, devenue traditionnelle, de la structure canonique des preuves euclidiennes). Mais il apporte souvent pour cela des éléments originaux, promis à une fortune considérable. Dans le cas qui nous occupe, il soutient qu'Euclide a commencé par des problèmes parce qu'il devait s'assurer de l'existence de l'objet dont les théorèmes établissaient les propriétés[37]. On a là un des premiers arguments accordant aux constructions la capacité à établir l'existence d'objets introduits par stipulation par le mathématicien — argument qui se retrouvera jusqu'à aujourd'hui dans différentes formes de « constructivisme »[38]. On se gardera néanmoins — nous en verrons d'autres exemples par la suite — de forcer le caractère normatif de ces thèses. Proclus est trop attentif à la pratique géométrique pour ne pas savoir qu'il y a des cas où la construction elle-même ne garantit *pas* l'existence et mentionne notamment à ce titre les cas de « porismes » (sur lesquels Euclide est dit avoir écrit pas moins de trois livres aujourd'hui perdus)[39].

---

postulat V était démontrable et renvoie à toute une littérature ancienne sur la question (dont un livre entier de Ptolémée ! [F 191-192]).

35. Pour un aperçu récent sur cette histoire, voir De Risi (2016).

36. Cette distinction n'est pas explicite chez Euclide mais correspond au fait que les propositions demandant une construction sont formulées d'une manière spécifique (temps, mode verbal utilisé, etc.) et se concluent par un « ce qu'il fallait produire », par opposition au « ce qu'il fallait démontrer » qui conclut les théorèmes.

37. « Car si l'on n'a pas d'abord montré l'existence des triangles et de leur mode de construction, comment peut-on discourir sur leurs propriétés essentielles ? » [F 233–235].

38. D'après Michael Detlefsen, on trouve là la matrice d'un argument « présentiste » en philosophie des mathématiques qui aurait survécu jusqu'à la naissance de l'algèbre symbolique et le développement de la connaissance que Leibniz appelle « symbolique » ou « aveugle », acte de naissance, notamment avec les prises de position de Berkeley, des premiers arguments « formalistes » (Detlefsen (2005)). Pour une discussion critique de la thèse ancienne selon laquelle les constructions servent dans la géométrie grecque d'attestation d'existence, voir Harari (2003), dans lequel on trouvera un état des lieux de la littérature secondaire abondante sur la question, et Rabouin (2015b).

39. Proclus fait ressortir le contraste entre des cas évident de construction, comme celui de la bissectrice d'un angle, et des cas plus litigieux. Ainsi, dans la proposition III.1 des *Éléments*, il faut trouver le centre d'un cercle, problème qui ne saurait relever d'un construction à proprement parler, puisqu'un cercle ne peut pas être construit sans que son centre soit donné. Proclus présente

Reste que le rôle de la construction est clairement mis en avant et, avec lui, la genèse des objets dans une approche dynamique et causale. Ainsi, discutant de la proposition I.16 où Euclide démontre que l'angle externe, que fait un triangle avec le prolongement d'un de ses côtés, est plus grand que chaque angle interne opposé, Proclus indique que l'on peut saisir la « vraie cause » du phénomène en recourant à une approche génétique. Le passage se conclut : « De cela, nous pouvons déduire comment la genèse des choses met devant nos yeux les vraies causes de ce que nous cherchions » [F 310.5-8]. La proposition de Proclus est d'imaginer le mouvement de deux lignes tombant à angle droit sur une autre et pivotant l'une vers l'autre (cf. Fig. 1). Il fait alors remarquer que l'angle externe grandit à mesure que les angles internes diminuent, ce qu'il tient pour la vraie raison du fait invoqué dans la démonstration euclidienne.

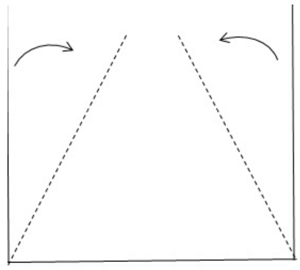

FIGURE 1 – L'explication génétique du fait décrit dans la proposition I.16 des *Éléments* selon Proclus.

Proclus reprend le même raisonnement dans la proposition suivante (où l'on démontre que dans un triangle, deux angles internes sont toujours plus petits que deux droits). Il insiste alors sur le fait que la vraie cause de ce résultat ne saurait faire appel à la prolongation d'un des côtés. De fait, la construction auxiliaire fait intervenir un élément extérieur à l'essence du triangle, dont on exhibe une propriété, et l'on ne peut concevoir qu'une chose qui n'est pas nécessaire agisse comme cause d'un résultat nécessaire [F 311]. Ceci reprend ses remarques dans la description des preuves [F 206], où il faisait remarquer que certaines démonstrations mathématiques ne sont pas parfaites (lesquelles mobilisent les définitions et un moyen terme valant comme raison du résultat), mais procèdent « par signe » (selon une distinction introduite par Aristote, *An. Post.*, I.6, 75a et II.17, 99a). Cette description des modalités de la preuve connaîtra, on le verra, une fortune considérable à la Renaissance au titre de la *quaestio de certitudine mathematicarum* (voir section 4).

Cela dit, on se gardera à nouveau de transformer trop vite les descriptions de Proclus en prescriptions : le fait qu'il y ait des preuves « par signe » n'est pas présenté comme un défaut. Lorsqu'il s'agit de commenter I.32 où est exhibée la propriété fondamentale dont peuvent être dérivées I.16 et I.17 (à savoir que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits), Proclus insiste sur le fait qu'Euclide a néanmoins eu raison de séparer les étapes de la preuve afin de pouvoir introduire certains éléments dont il avait besoin pour la démonstration finale. Il en va de même

ces cas comme intermédiaires entre problèmes et théorèmes et renvoie à ce propos aux livres de *Porismes* d'Euclide [F 302, 3–13].

des preuves par l'absurde dont il paraît difficile de soutenir qu'elles exhibent la cause du fait démontré, et que Proclus tient néanmoins pour nécessaires, surtout lorsqu'il s'agit d'établir la vérité de propositions converses à celles qui viennent d'être démontrées [F 321].

Ces vues sont appuyées sur des thèses très intéressantes en théorie de la connaissance. Proclus y trace une voie originale entre Platon et Aristote (O'Meara (1989), Mueller (1987), Rabouin (2009)). Son ressort premier est la mise en avant, bien avant Kant, du rôle central de l'imagination productive en mathématiques. Outre la fécondité et la modernité des vues procléennes sur ces questions, elle nous permet de montrer que certaines interprétations philosophiques qu'on croit nécessairement associées à la géométrie grecque ancienne ne le sont nullement. Ainsi entend-on souvent dire que la géométrie euclidienne est une science de la figure, statique, qui ne peut accepter les transformations et l'existence d'un espace infini. Or on vient pourtant de voir chez un auteur, certes tardif mais non moins grec — et qui plus est successeur de Platon à la tête de l'Académie — une insistance très forte sur le rôle de la transformation en géométrie (pour faire saisir la genèse des propriétés). On y trouverait également une insistance sur le fait que — *pace* Aristote — le géomètre doit avoir recourt à un infini actuel, dont la forme achevée est l'espace géométrique tridimensionnel [40].

Enfin, Proclus est la source principale pour une multitude de problèmes locaux qui vont jouer un rôle très important dans les discussions postérieures sur la géométrie, qu'il s'agisse d'axiomes omis par Euclide, comme le fait que deux droites ne peuvent enfermer un espace, du caractère problématique de certaines preuves (par exemple celle qui, comme I.4, procède par « superposition »), du statut de certaintes entités comme l'angle de contingence [41]. Enfin, il développe une réflexion approfondie sur la question de ce qui fait l'unité des mathématiques grecques et offre le premier traitement systématique sur la possibilité d'une *mathesis universalis* (Rabouin (2009)). Tous ces éléments vont jouer un rôle central, au côté des interrogations issues d'Aristote (par exemple sur la composition du continu), dans ce qui nous est préservé des discussions de philosophie des mathématiques dans les périodes postérieures [42].

4 Philosophie des mathématiques et « Révolution scientifique »

Même si la philosophie des mathématiques connaît des développements très importants durant les périodes médiévales, qu'elles soient latine ou arabe, elle se caractérise globalement par une grande continuité avec les problèmes soulevés dans la période précédente. Il y est encore beaucoup question de la composition du continu, de l'infini, de l'organisation des disciplines, de l'analyse et de la synthèse (voir aussi

40. La défense de l'infini actuel est explicite chez Proclus [F 284], cf.Rabouin (2015b).

41. Voir Rashed (2012), Rommevaux (2006) et les travaux de François Loget cités ci-dessous note 48.

42. Même si nous ne trouvons pas de versions du *Commentaire* dans le Moyen-âge latin et arabe, nombre de ses thèses n'en ont pas moins circulé anonymement au travers des scolies aux *Éléments*.

ci-dessous, section 5, p. 20), de l'angle de contingence (Rashed (2015)) ou du rôle du mouvement dans la géométrie (Crozet (2010)). On s'attendrait à ce que les choses changent très profondément avec la « révolution scientifique » et le développement rapide des mathématiques qui s'engage avec elle. C'est, en effet, la période qui voit naître l'algèbre symbolique, elle-même soutien d'un essor sans précédent de la géométrie algébrique, puis le calcul différentiel et intégral, sans parler des premiers pas de la géométrie projective, ou de la théorie des probabilités. Or, autant il est vrai que la philosophie des mathématiques prospère à un rythme inégalé aux XVIe et XVIIe siècle, autant on aurait tort de lier trop vite cette prospérité à un renouvellement soudain des problématiques. La « Renaissance », comme son nom le rappelle, est avant tout une période de redécouverte et de retour aux Anciens et cela vaut particulièrement pour la philosophie des mathématiques qui va circuler au travers des commentaires d'Eutocius, Pappus, Proclus ou Marinus. Ainsi Le *Commentaire au premier livre des Éléments* de Proclus, dont certains thèmes avaient circulé isolément, est-il publié pour la première fois en grec en accompagnement de l'*editio princeps* des *Élements* d'Euclide par Simon Grynée en 1533 (Gryneaus (1533)) — ce qui veut dire que toute personne qui lisait l'édition grecque avait *ipso facto* accès au commentaire de Proclus comme à son explication. Il n'est que d'ouvrir la grande édition d'Euclide en latin procurée par Clavius pour constater à quel point le texte original et le commentaire s'y trouve désormais mêlés (Rommevaux (2005)). Ceci n'est certes qu'un exemple de texte redécouvert, mais qui va jouer un rôle particulièrement important et qui va nous permettre de complexifier grandement l'image traditionnelle associée à la « révolution scientifique ».

De fait, notre connaissance de ce qu'Alexandre Koyré avait proposé de désigner sous ce terme a profondément progressé au cours des cinquante dernières années en ce qui concerne la philosophie des mathématiques. Là où Koyré voyait un changement radical de régime (la « Revanche de Platon, (Koyré, 1985, p. 258)), gouverné par un idéal philosophique platonicien mettant terme à la domination d'un modèle aristotélicien scolastique laissant peu de place aux mathématiques, nous voyons plutôt une évolution qui prend son départ dans l'université aristotélicienne elle-même et dont la source platonicienne n'aura pas du tout fonctionné comme on le croyait.

Un vecteur important de ces réflexions est la question dite « de la certitude des mathématiques » (*quaestio de certitudine mathematicarum*) qui a fait l'objet d'études importantes dans les dernières décennies[43]. Cette question, issue en partie du commentaire d'Averroès à Aristote, consiste à demander si les mathématiques sont une science dotée du plus haut degré de certitude. Le moteur principal de l'interrogation est de savoir si cette science est capable d'exhiber des démonstrations « les plus parfaites » (*potissimae*), c'est-à-dire à même de donner le fait et la raison du fait (selon la typologie aristotélicienne distinguant les preuves τὸ ὅτι et τὸ διότι en *An. Post.* I.13.). Il peut être intéressant de rappeler les propos d'un des principaux initiateurs de cette querelle qui va agiter ceux qui réfléchissent sur les mathématiques pendant plus d'un siècle :

> Averroès affirme [. . .] que les démonstrations mathématiques sont les premières dans l'ordre de la certitude, dans le commentaire 16 sur le livre

43. On trouvera un panorama des études sur la question en ouverture de Mancosu (1996). Voir également De Pace (1993).

> II de la *Métaphysique*, à propos du passage d'Aristote "On ne doit pas attendre en toutes choses la certitude des mathématiques". Et presque tous les Latins que j'ai consultés, parmi les anciens, comme saint Albert, saint Thomas, Marsile et Gilles, mais aussi parmi les plus récents, Zimara, Suessanus, Acciaiolus, et la plupart des autres, quand ils tombent sur cette autorité, d'une seule parole et comme se suivant l'un l'autre, l'interprètent de la façon suivante : Averroès affirme cela parce que le mathématicien démontre à partir de choses plus connues, pour nous et par nature, et qu'assurément, seul ou plus que les autres, il utilise cette démonstration qu'ils appellent la plus puissante, à avoir celle qui fait connaître en même temps clairement et ce qu'est l'effet et pourquoi c'est ainsi ((Piccolomini, 1547, *Praefatio*) ; trad. fr. J. Biard).

Comme on le voit, l'histoire racontée ici est en parfait contrepoint à celle racontée par Koyré : au début du XVI[e] siècle, le consensus qui s'est dégagé parmi les auteurs aristotéliciens, du moins dans les communautés où évolue Piccolomini, est que les mathématiques sont douées *du plus haut degré de certitude*. Mais poursuivons :

> Quant à moi, bien que dans mon adolescence, impressionné par l'autorité de tant d'hommes, je me sois rangé à leur opinion et à leur interprétation de ce passage, plus tard cependant, lorsque je me suis tourné assidûment vers les mathématiques, et que j'en ai traité plus profondément, tant s'en faut que je restasse plus longtemps dans cette opinion, mais j'estimais au contraire non seulement que les démonstrations des géomètres et des autres mathématiciens n'étaient pas les plus puissantes, mais encore qu'ils parvenaient à peine à y accéder. Cependant, bien que cette pensée qui était la mienne me fût prouvée de la façon la plus constante, et qu'elle soit soutenue par de nombreuses raisons, au fond de moi cependant, pour que quelque chose dit par moi ne me semblât pas un *parodoxon*, j'ai été conduit à la retenir jusqu'à ce que, sachant que Proclus lui-même pensait cela, ressentant la plus haute joie en mon esprit en tombant sur un témoin si sûr, j'aie ensuite souvent soutenu cela d'une voix claire, et j'ai démontré, par des raisons et des autorités, qu'elle n'était pas étrangère à la philosophie péripatéticienne (*Ibid.*).

Ainsi apprenons-nous que le principal soutien à l'argument contre la certitude des mathématiques fut donné par... un platonicien convaincu : Proclus. Ceci ne doit pas totalement nous surprendre puisque nous avons vu que le *Commentaire au premier livre des Éléments d'Euclide* est bien, jusqu'à aujourd'hui, la principale source sur les nombreuses controverses qui agitaient les mathématiciens anciens autour de la pratique euclidienne. De fait, Piccolomini n'a alors qu'à reprendre les discussions que nous avons évoquées sur les démonstrations « par signe », et en particulier autour des propositions I.16, 1.17 et 1.32, pour conclure que les démonstrations mathématiques ne sauraient être *potissimae* puisque, de l'aveu même de Proclus, elle ne sont pas capables d'exhiber la cause du fait qu'elles établissent.

Ceci, comme on peut bien l'imaginer, entraîna une série de ripostes et de contre-ripostes, qui agitèrent les mathématiciens et les philosophes *jusqu'à la fin du* XVII[e] *siècle* (on en trouve des traces chez Barrow, Wallis, Newton par exemple, cf. Sergio (2006)).

Mais le plus important est de constater que les oppositions peuvent parfois opérer à front renversé, si bien qu'il faut se garder d'y projeter une entente préalable de ce que devrait être, croit-on, le débat du platonisme et de l'aristolélisme.

Plus profondément peut-être, on doit noter que les mathématiques circulent aux XVIe et XVIIe siècles le long de controverses qui colorent les différentes manières de défendre leur « certitude » de nuances importantes et qu'il est vain de s'arrêter aux simples déclarations incantatoires sur cette science sans creuser les ressorts de ses défenses (ou critiques). Prenons l'exemple de Descartes et sa mise en avant des mathématiques comme seule science exempte de controverses dans les *Regulae*[44]. Cela ne l'empêche nullement de rappeler, dans un passage qui n'est pas sans évoquer celui que nous venons d'évoquer chez Piccolomini :

> Quand je commençai à appliquer mon esprit aux disciplines mathématiques, je lus d'abord la plupart de ce qu'en rapportent les Autorités qu'on lit d'habitude, et je me plaisais surtout à l'Arithmétique et à la Géométrie, parce qu'on les disait être très simples et comme des chemins vers les autres. Mais en aucune des deux ne me tombaient alors entre les mains d'Ecrivains, qui me satisfassent pleinement : car certes j'y lisais plusieurs choses à propos des nombres, que j'expérimentais être vraies après en avoir fait les calculs ; à propos des figures aussi, ils en faisaient voir beaucoup en une certaine manière à mes yeux mêmes, et ils les concluaient à partir de certaines conséquences [de raisons] ; mais ils ne semblaient pas montrer à l'esprit pourquoi ces choses étaient ainsi, et comment on les trouvait ((Descartes, 1977, p. 13) ; AT X, 374-375).

Or ceci n'est pas un point de détail dans l'appréciation de la pratique mathématique du Descartes de la maturité. De fait, c'est précisément l'insistance sur la nécessité de faire voir les raisons des phénomènes étudiés qui commande l'idée que la méthode adéquate doit être analytique plutôt que synthétique. C'est elle qui justifie également que les preuves par l'absurde soient jugées inférieures, de même qu'elle n'est pas sans lien avec la mise en avant du rôle de la construction des équations et des critères d'exactitude – aspects sur lesquels nous revenons dans la section 5.

Ce n'est là qu'un exemple, mais qui a des échos chez la plupart des auteurs classiques. Ainsi Leibniz, trop souvent présenté comme un défenseur des méthodes symboliques « aveugles » (alors qu'il ne cesse d'insister sur le fait qu'elles doivent toujours être accompagnées de preuves de possibilité) réplique-t-il à Prestet qui jugeait les constructions géométriques inutiles :

> Il répète plusieurs fois que la détermination des grandeurs par les lignes n'éclaire pas l'esprit ; on peut lui dire qu'elles l'éclairent en lui apprenant la construction du problème, ou le moyen de trouver dans la nature ce qu'il cherche. Car il me semble que l'esprit est fort éclairé quand il apprend que les grandeurs incommensurables sont quelque chose de

44. En particulier dans la Règle II où Descartes avance le critère du désaccord comme signe de l'incertitude et conclut : « en sorte que, si nous calculons bien, seules demeurent parmi les sciences déjà inventées l'Arithmétique et la Géométrie, auxquelles l'observance de la présente règle nous ramène » [AT X, 163]. Suivant l'usage, on note de façon abrégée [AT] l'édition Descartes (1964-1974).

véritable et de réel (A VII, 2, 803-804) [45].

De même commente-t-il, à propos des postulats euclidiens :

> Les Géomètres, qui sont les véritables maîtres dans l'art de raisonner, ont vu que, pour que les démonstrations qu'on tire des définitions soient bonnes, il faut prouver ou postuler au moins que la notion comprise dans la définition est possible. C'est pourquoi Euclide a mis parmi ses postulata que le cercle est quelque chose de possible, en demandant qu'on puisse décrire un cercle dont le centre et le rayon soient donnés (GP IV, 401) [46].

Dans le fragment « Sur la synthèse et l'analyse universelle ou sur l'art d'inventer et de juger », Leibniz revient sur cette idée en disant que les meilleures définitions (dites « réelles ») sont celles qui font voir la « cause prochaine » de l'objet considéré :

> Fonder une hypothèse ou expliquer le mode de production n'est rien d'autre que démontrer la possibilité de la chose, ce qui est utile, même si souvent la chose considérée n'a pas été engendrée de cette manière. Ainsi la même ellipse peut être comprise comme décrite dans un plan à l'aide de deux foyers et du mouvement d'un fil entourés sur eux, ou comme section du cône ou du cylindre. Une fois trouvée une hypothèse ou un mode de production, on possède une définition réelle, d'où l'on peut tirer d'autres définitions ; et parmi celles-ci on pourra choisir celles qui s'accordent le plus à toutes les autres choses, quand on cherche le mode de production actuel de la chose (A VI, 4, A, 542-543 ; GP VII, 295).

Des considérations comparables sur les « définitions génétiques » ou « réelles » se retrouvent, entre autres, chez Tschirnhaus, Hobbes ou Spinoza, tandis qu'on trouve des réflexions sur la nature causale ou non de la connaissance mathématique chez Gassendi, Wallis ou Barrow (cf. Mancosu (1996) et Sergio (2006)). L'important est de bien voir que ces considérations ne sont pas quelques rémanences de problèmes archaïques, mais gouvernent un certain rapport à la pratique mathématique selon un idéal, qu'on peut interpréter de différentes façons, voire qu'on peut refuser tout de go, mais qui n'en agit pas moins en basse continue dans les réflexions de tous ces auteurs. À côté de Descartes et Leibniz, on aurait également pu mentionner Newton qui, après avoir développé avec virtuosité les méthodes de l'algèbre symbolique des Modernes (Panza (2005)), s'est saisi lui aussi de la question de leur certitude et a été amené à revenir ostensiblement à un idéal constructif hérité de la géométrie ancienne (Guicciardini (2009)). Plus généralement, on n'aurait guère de mal à montrer que la *quaestio de certitudine* sert de ressort caché à nombre de questionnements de la période moderne autour des normes réglant le raisonnement mathématique : acceptation ou rejet des preuves par l'absurde, des preuves par superposition, existence d'une *mathesis universalis*, rôle du mouvement (et conjointement de l'imagination) en mathématiques [47]. Et ce n'est pas là la seule question ancienne qui informe les

45. Suivant l'usage, on note de façon abrégée A l'édition Leibniz (1923-).
46. Suivant l'usage, on note de façon abrégée GP l'édition Leibniz (1875-1899).
47. C'est une des convictions qui sert de fil directeur aux travaux déjà cités de Mancosu (1996) et Sergio (2006).

discussions des auteurs classiques : la question de l'angle de contingence nourrit les querelles de Peletier, Clavius, Wallis, Leibniz et Newton [48], celle de la quadrature du cercle court d'Oronce Fine et Scaliger jusqu'aux controverses de Huygens et Gregory.

Tous ces éléments, et bien d'autres, indiquent qu'on fait fausse route à vouloir reconstituer la philosophie des mathématiques de ces auteurs simplement à partir du renouvellement des pratiques. Cela ne veut pas dire que de nouveaux problèmes n'émergent pas, comme nous allons le voir dans la section suivante, mais que ces nouvelles questions n'ont pas chassé les anciennes, voire ne font souvent que les prolonger par d'autres moyens.

5 Des Anciens aux modernes : quelques thèmes classiques entre philosophie et pratique mathématique

Dans cette section, nous nous intéresserons plus particulièrement à la philosophie des mathématiques, telle qu'elle est proposée par les acteurs à partir de leur pratique mathématique. Nous prendrons comme points de départ et d'arrivée, d'un côté, l'édition latine commentée des *Coniques* d'Apollonius parue en 1566, de l'autre, l'*Introductio in Analysin Infinitorum* publiée par Euler en 1748. La publication des *Coniques* d'Apollonius participe d'un mouvement qu'on a déjà évoqué et qui se poursuit jusqu'au début du XVIII^e^ siècle (cf. Apollonius (1710)) dont deux protagonistes sont Commandin et Clavius. Il s'agit de procurer des édition critiques, des traductions en latin, et des commentaires mathématiques des grandes Œuvres qui appartiennent à la « Géométrie des Anciens », celle des géomètres grecs, Euclide, Archimède, Apollonius, mais aussi les vestiges réunis dans la *Collection mathématique* du compilateur plus tardif Pappus (cf. *inter alia* Apollonius (1566), Pappus (1588), Euclide (1589) et Archimède (1615)). Aux termes de notre période, l'*Introductio in Analysin Infinitorum* publiée par Euler en 1748, bien qu'elle offre encore à l'historien des mathématiques quelques vestiges des thèmes et des problèmes de la période moderne (la classification des courbes, la construction des équations pour résoudre les problèmes géométriques), donne le premier rôle à un objet mathématique dont le processus de genèse a sous-tendu depuis Descartes, et surtout Newton (voir Panza (2005)), le développement des mathématiques et qui est appelé à jouer dans la suite un rôle fondamental : la fonction.

Si le manuel euclidien n'a que peu d'influence au dix-septième siècle sur l'*invention* mathématique (même s'il joue un rôle normatif quant aux pratiques), il en va tout autrement des *Coniques* d'Apollonius et de l'œuvre mathématique et mécanique d'Archimède qui inspirent les recherches de l'époque consacrées aux courbes géométriques : théorie des coniques et problèmes des tangentes pour Apollonius, problèmes de quadrature pour Archimède. Cette circulation — rare dans l'histoire des mathématiques [49] — entre Anciens et Modernes, commentaire de textes

48. Voir les travaux de François Loget : Loget (2014), Loget (2011) et Loget (2002).

49. On la retrouve à l'œuvre, quelques siècles auparavant, dans les mathématiques arabes médiévales qui entretiennent, du reste, des rapports non seulement conceptuels mais textuels avec les

et résolution de problèmes, instaure une relation privilégiée et symétrique entre philosophie et pratique des mathématiques que nous allons étudier plus en détail. Les restitutions (par exemple, les *Lieux plans* d'Apollonius par Fermat) peuvent ainsi parfois s'opposer dans leur souci de fidélité à des éditions modernes, telles que l'édition « symbolique » des *Coniques* d'Apollonius par Barrow, qui n'hésitent pas à employer le symbolisme algébrique de l'époque. Pour autant, il n'en reste pas moins que les premières constituent la propédeutique nécessaire à des recherches *nouvelles*. Dans ce contexte, les commentaires et les réflexions de nature méthodologique ou philosophique qu'on trouve dans les éditions des géomètres anciens sont ainsi lus avant d'être réélaborés à l'aune des développements mathématiques de l'époque. S'ajoute enfin une autre caractéristique de notre période : le fait que les mêmes auteurs (Descartes, Pascal, Leibniz) conduisent souvent concurremment une œuvre à la fois mathématique et philosophique, la solidarité des deux entreprises n'ayant cessé d'être à la fois posée et interrogée par les historiens des mathématiques et de la philosophie[50] qui, dans les faits, n'étudient pas moins chacun des corpus, le plus souvent, isolément.

On peut dès lors distinguer dans la période moderne trois corpus de textes distincts qui se rapportent à ce que nous appellerions « philosophie des mathématiques » : celui de la philosophie, celui de la philosophie des mathématiques proprement dite — qu'on trouve notamment dans les commentaires, le modèle prototypique étant le commentaire de Proclus aux *Éléments* d'Euclide que nous avons étudié dans la section précédente —, et celui de la pratique mathématique. L'histoire que nous allons retracer dans cette section consistera en particulier à identifier les circulations entre ces corpus, les similitudes ou contrastes qui en résultent, en adoptant un point de vue à la fois diachronique, donc attentif aux traditions, et synchronique. Nous suivrons en outre un fil d'Ariane, celui de la résolution de problèmes, tout en signalant les débats nombreux et divers de la période moderne en tâchant d'éviter les Charybde et Scylla d'une histoire philosophique des mathématiques, à savoir une reconstruction conceptuelle qui laisserait de côté des pans entiers du corpus qui lui échappent, ou bien une chronique descriptive des débats et controverses qui s'enchaînent à cette époque[51]. Ajoutons pour clore ce préambule que Descartes occupera une place importante sinon centrale dans notre présentation : il a en effet contribué de façon majeure aux différents thèmes et problèmes que nous allons aborder et occupe une position pivot au sein de la longue tradition de résolution des problèmes géométriques entre géomètres anciens et modernes.

Le premier thème s'inscrivant dans une tradition à la fois ancienne et moderne que nous étudierons est celui de la classification des problèmes et des courbes. On trouve une classification des problèmes géométriques[52] fondée sur les courbes employées dans la résolution du problème dans deux célèbres passages, au reste quasi-

mathématiques du dix-septième siècle. On pourra consulter à ce sujet Rashed (2011).

50. Un exemple classique est fourni par le rapport qui devrait être établi entre, d'un côté, la *Géométrie* de Descartes, et, de l'autre, le *Discours de la méthode* ou bien les *Regulae*. Cf. Israel (1998), Rabouin (2015a).

51. Dans la suite, nous ferons un usage constant des ouvrages de référence (Mancosu, 1996; Bos, 2001; Panza, 2005; Guicciardini, 2009) auxquels nous renvoyons le lecteur pour davantage de détails dans la présentation et l'analyse historique et philosophique des textes.

52. Pour un exposé détaillé, voir (Bos, 2001, p. 37-57).

identiques, de la *Collection mathématique* de Pappus (Pappus, 1588, III, § 7, Prop. 5 et IV, § 36, Props 31-34), catalogue riche mais relativement désordonné de problèmes géométriques et des différentes solutions proposées par les géomètres grecs, au moyen de courbes, d'instruments ou bien de constructions auxiliaires comme la *neusis* ou intercalation (cf. (Bos, 2001, p. 53-56)). Il y est précisé que les problèmes *plans* sont ceux qui requièrent des cercles et des droites, pendant que les problèmes *solides* nécessitent l'emploi de coniques, et les problèmes *linéaires* d'autres lignes comme les spirales, les quadratrices, les conchoïdes et les cissoïdes mais, surtout, que ce serait une *faute* ('*peccatum*' dans la traduction de Commandinus) d'employer dans la solution d'un problème une courbe inappropriée relativement au genre dont celui-là dépend comme, par exemple, une conique lorsque le problème est plan. Cette classification et ce précepte vont retenir l'attention des mathématiciens modernes et conduire ces derniers à proposer une classification des courbes (plutôt qu'une classification des instruments) pour classer les problèmes qui paraissent échapper à une construction à la règle et au compas[53].

C'est précisément en partant de la classification des problèmes de Pappus qu'il critique, que Descartes propose une classification des courbes recevables en géométrie en genres selon le degré de l'équation de chaque courbe dans le célèbre passage qui inaugure le livre II de sa *Géométrie* (cf. [AT VI, p. 388-393], (Bos, 2001, p. 335-354), (Vuillemin, 1960, p. 77-98) et (Panza, 2011b, p. 74-91)). Il introduit à cette occasion les compas cartésiens (cf. (Serfati, 1993)) qui servent à la résolution des problèmes d'insertion de moyennes proportionnelles (*ibid.*, p. 391-392), avant de les rejeter, au début du livre III, au motif qu'ils ne tracent pas les courbes les plus *simples* à même de résoudre ces problèmes (*ibid.*, p. 442-444), la simplicité portant sur le genre c'est-à-dire le degré de l'équation de la courbe. La classification des problèmes géométriques de Descartes, fondée sur le degré de l'équation obtenue à l'issue de l'analyse algébrique du problème, inaugure une théorie dont on trouve encore les vestiges dans l'*Introductio in Analysin Infinitorum* d'Euler : la construction des équations (cf. Bos (1984)). Cette théorie va introduire des débats parmi les acteurs relatifs à plusieurs valeurs épistémiques. De fait, la prééminence accordée par Descartes à la *simplicité* de l'équation sur la *facilité* de la construction sera remise en question, en particulier au début du XVIIIe siècle par L'Hôpital et Guisnée, dans la ligne des critiques faites par Fermat dans sa *Dissertation tripartite* sur la classification des problèmes de Descartes (cf. (Bos, 1984, p. 365-367) ; (Maronne, 2017, p. 83-86)). En effet, pour une équation de degré 7 qui devrait être construite, d'après Descartes, au moyen d'un cercle et d'une quartique, on peut remarquer qu'il suffit de n'employer que des cubiques. Le critère cartésien de simplicité est donc ici mis en défaut.

Ajoutons pour terminer que le problème de la classification des courbes s'inscrit dans une tradition ancienne et ininterrompue (cf. Rashed (2005)) qui débute avec les Grecs, se poursuit avec les géomètres arabes, et culmine à la période moderne avec la classification des cubiques donnée par Newton dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis* (cf. (Guicciardini, 2009, p. 109-136)) et la classification des cubiques et des

53. Les démonstrations de l'impossibilité de la construction à la règle et au compas des problèmes grecs classiques — duplication du cube, trisection de l'angle, quadrature du cercle — ne seront données que bien plus tard au dix-neuvième siècle.

quartiques donnée par Euler dans son *Introductio in Analysin Infinitorum* (Euler, 1748, II, Chap. IX et XI, p. 114-126 et 139-149).

Le second thème que nous abordons a donné lieu à une historiographie surabondante : c'est celui de l'*analyse*[54]. On retrouve en effet dans la période moderne deux types d'analyse à l'œuvre : l'analyse géométrique classique et l'analyse algébrique moderne (cf. (Bos, 2001, p. 95-117)). La première est codifiée par Pappus au début du livre VII de sa *Collection Mathématique* (Pappus, 1588, Livre VII, Introduction) dans un passage difficile à interpréter qui a été abondamment commenté. Le fait que Pappus mentionne d'une part l'existence d'un « trésor de l'analyse » comprenant des textes pour la plupart perdus, et que, d'autre part, la plupart des grands textes géométriques grecs, à commencer par les *Éléments* d'Euclide, mais aussi les *Coniques* d'Apollonius, soient écrits dans le style synthétique, a conduit les mathématiciens de la période moderne à penser que les Anciens disposaient d'une *méthode* analytique de résolution des problèmes géométriques, qu'ils avaient gardée par devers eux[55]. Dans ces conditions, la nouvelle analyse algébrique moderne, initiée par Viète puis Descartes, ne pouvait apparaître pour ses promoteurs que comme une résurgence de l'ancienne[56].

Descartes (cf. Dubouclez (2013)), dans le contexte d'un traité philosophique, les *Méditations métaphysiques*, revient dans ses *Secondes Réponses aux Objections* sur la distinction entre analyse et synthèse, en accordant la prééminence à l'analyse sur la synthèse en tant que méthode heuristique et démonstrative :

> L'analyse monstre la vraye voye par laquelle une chose a esté methodiquement inventée, & fait voir comment les effets dépendent des causes ; en sorte que, si le lecteur la veut suivre, & jetter les yeux soigneusement sur tout ce qu'elle contient, il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si luymesme l'avoit inventée (AT IXa, 121)

Néanmoins, des auteurs comme Ghetaldi continuent à la même époque à cultiver l'analyse géométrique classique, considérant même qu'elle surpasse l'analyse algébrique dans la résolution de certains problèmes qui demeurent fermés à celle-là (cf. (Bos, 2001, n. 1, p. 95 et p. 98-109)).

Ces discussions s'insèrent dans un débat normatif plus général sur l'acception ou le refus des techniques algébriques dans la résolution des problèmes. Elle fut l'occasion de débats virulents comme celui qui opposa en Angleterre Thomas Hobbes, partisan du modèle géométrique ancien, et John Wallis, partisan des techniques algébriques modernes[57]. De manière très intéressante, cette querelle philosophique eut d'ailleurs des prolongements directs dans la pratique autour de l'opposition entre

54. Cf. *inter alia* l'ouvrage collectif Panza et Otte (1997), en particulier Panza (1997), ainsi que Gardies (2001).

55. Cf. par exemple les passages cartésiens bien connus des *Regulae ad directionem ingenii* et des *Secondes réponses aux objections* : [AT X, p. 373] et [AT IXa, p. 122].

56. Voir par exemple, l'introduction à l'*Isagoge* de Viète (Viète, 1591, Chap. 1, p. 4) mais aussi le *Discours de la Méthode* ou Descartes présente sa propre méthode comme une fusion de l'analyse des Anciens et de l'algèbre des Modernes [AT VI, p. 17-20].

57. On trouvera également dans Jesseph (1999) une étude détaillée de la riche controverse philosophico-mathématique qui oppose les deux auteurs, au sein de laquelle sont abordées notamment la question de la nature des entités géométriques ou bien celle de la nature de l'infini.

Wallis, partisan d'un fondement arithmétique des mathématiques, et Barrow, attaché au modèle géométrique (cf. (Mancosu, 1996, p. 86-88) et Jesseph (1999)) – preuve, s'il en fallait, que les questions fondationnelles n'émergent nullement à la fin du XIXe siècle.

Cette dialectique de l'ancien et du moderne est également à l'œuvre dans le traitement par les mathématiciens du dix-septième siècle de deux grands problèmes hérités des Anciens, le problème de l'infini et celui de la dimension des grandeurs géométriques, et d'un troisième problème moins manifeste mais néanmoins latent dans la pratique mathématique de l'époque, celui des quantités négatives. À nouveau, il faut noter que les méthodes des Anciens ne sont pas balayées d'un revers de la main par les Modernes mais qu'au contraire, elles ne laissent pas d'être cultivées et confrontées aux méthodes modernes, allant jusqu'à offrir un fondement rigoureux à ces dernières : tel est notamment le rôle joué par la méthode d'exhaustion [58] vis-à-vis de la géométrie des indivisibles, comme on le verra dans la suite.

Si l'orthodoxie géométrique imposait de ne considérer que trois sortes de grandeurs géométriques — les longueurs, les aires, ou les volumes — et de ne manipuler de concert que des grandeurs *homogènes*. Viète puis Descartes outrepassent chacun à leur manière ces limites. Viète définit dans l'*Isagoge* (Viète, 1591) une « logistique spécieuse » en introduisant un système de grandeurs abstraites de dimension arbitrairement grande qui vérifient un certain nombre d'*axiomes* relatifs aux opérations usuelles d'addition et de multiplication et satisfont la contrainte d'homogénéité pour ces opérations (cf. (Bos, 2001, p. 145-154) et Panza (2007b)). Cette nouvelle algèbre s'accompagne d'un schématisme : en particulier, les inconnues y sont désignées par des voyelles 'A', 'E', ...et les données par des consonnes 'B', 'C', ... Dans les toutes premières lignes de la *Géométrie*, Descartes « rapporte l'arithmétique à la géométrie » et définit pour les segments, en plus de l'addition et de la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction de racine carrée, dès lors qu'une unité a été fixée « à discrétion » [AT VI, p. 369-370]. Ceci lui permet de s'affranchir des contraintes de la dimension et de l'homogénéité des grandeurs car, à la différence de Viète, la multiplication de deux segments est une opération interne qui produit un segment. Il n'en reste pas moins que ce passage de la *Géométrie* qui a alerté nombre de commentateurs [59] n'a pas suscité le même enthousiasme de la part des mathématiciens de l'époque qui lurent la *Géométrie*. D'aucuns (comme Fermat et Sluse) continuèrent en effet à utiliser « en arrière-plan » le système de Viète : il faut dire que Descartes lui-même ne considère des équations non-homogènes qu'au livre III lorsqu'il s'intéresse, par exemple, à la construction des équations de degré 6 [AT VI, p. 477-484] [60].

58. Cette méthode, qui a été employée par Euclide et Archimède, permet de résoudre des problèmes de quadrature sans user de considérations infinitésimales, grâce à une double réduction à l'absurde. Elle est fondée sur l'axiome dit d'Archimède qui énonce que si deux grandeurs *du même genre* sont données, alors chacune, étant ajoutée à elle-même un assez grand nombre de fois, peut surpasser l'autre.

59. Ils l'ont en particulier comparé à des passages sur le même thème dans les *Regulae ad directionem ingenii* : cf. en particulier [AT X, 461-468, Règle 18].

60. Conserver des grandeurs homogènes présente l'avantage de pouvoir plus facilement contrôler les erreurs de calculs dans les expressions algébriques et de rendre les constructions indépendantes du choix de l'unité (cf. (Panza, 2005, p. 23-43)).

D'autre part, dans la géométrie « moderne », la théorie des proportions du Livre V des *Éléments* d'Euclide continue à offrir à la fois une base technique à la pratique mathématique de l'époque mais aussi un thème privilégié pour des commentaires philosophiques — portant en particulier sur la définition euclidienne de l'égalité des rapports qui demeure largement incomprise (cf. Sasaki (1985), (Gardies, 1984, p. 85-108), (Gardies, 1988, p. 125-138), Lamandé (2013)) —, et suscite de vifs débats entre les tenants d'une arithmétisation qui pensent que les proportions entre grandeurs, commensurables ou incommensurables, peuvent être exprimées par des nombres, et les orthodoxes. Les proportions jouent ainsi un rôle fondamental dans la *Géométrie* de Descartes (cf. Vuillemin (1960)) : sur le plan philosophique, comme nous le rappelle le *Discours de la méthode* [AT VI, p. 20] où Descartes étudie « les proportions en général », mais aussi sur le plan technique, en tant qu'elles inaugurent les « longues chaînes de raisons » du fait de l'usage par Descartes du théorème des triangles semblables[61]. Il en va de même en philosophie naturelle : pour étudier le mouvement uniformément accéléré à l'œuvre dans la chute des graves, non seulement Galilée emploie la théorie euclidienne des proportions mais il propose en outre dans un manuscrit dicté à Torricelli sa propre théorie (cf. Giusti (1993)). Ainsi, bien que le rapport tende à s'affirmer de plus en plus comme une quantité plutôt que comme une relation, les mathématiques du dix-septième siècle n'abandonnent pas le modèle euclidien.

On rencontre enfin le problème moins saillant des quantités négatives qui néanmoins va longtemps retenir l'attention des mathématiciens et des philosophes (cf. Kant et son *Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeur négative*). Les quantités négatives s'imposent en effet peu à peu dans la pratique mathématique, en particulier algébrique, car elles simplifient notablement les cas et les calculs, mais leur nature et la justification des calculs afférents posent problème. Qu'est-ce que cela peut bien signifier pour une quantité d'être moindre que rien ?[62] Fait remarquable, la discussion sur les quantités négatives et les paradoxes qui surviennent lorsqu'on leur applique, sans discernement, la théorie des proportions — par exemple, $(1 : -1 = -1 : 1)$ et $(1 > -1)$ devrait impliquer $(-1 > 1)$! — n'apparaît pourtant qu'à la fin du dix-septième, notamment dans les querelles entre Arnauld et Prestet (Mancosu, 1996, p. 88-90), Schubring (2005)), à un moment où on aurait pu considérer que ces problèmes avaient été supplantés par d'autres. Comme le vit Leibniz, cette discussion cachait d'ailleurs des questions plus profondes sur des objets que les premiers promoteurs de l'algèbre symbolique ignoraient : la question des logarithmes des nombres négatifs ou le statut d'un véritable domaine de nombres imaginaires (et non plus seulement des solutions imaginaires d'équations algébriques particulières)[63].

61. Voir par exemple la solution cartésienne du problème de Pappus : [AT VI, p. 382-384].

62. Descartes qualifie ainsi les racines négatives de « fausses » dans la *Géométrie* : [AT VI, 445] et n'emploie pas des coordonnées négatives dans sa résolution du problème de Pappus, ce qui a pour conséquence d'alourdir notablement l'analyse algébrique et de dissimuler l'existence d'une seconde conique solution qui paraît avoir échappé au philosophe. Cf. Maronne (2008).

63. Voyez le texte de Leibniz, *Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores et de vero sensu Methodi infinitesimalis*, publié en avril 1712 dans les *Acta eruditorum* (trad. fr. M. Parmentier dans (Leibniz, 1989, p. 422-435)).

6 La résolution des problèmes géométriques dans la période moderne

Dans la première phrase de la *Géométrie*, Descartes prétend réduire *tous* les problèmes géométriques — en écho à la formule finale de l'*Isagoge* de Viète '*nullum problema non solvere*' — « à tels termes, qu'il n'est besoin, par apres, que de connoistre la longueur de quelques lignes droites, pour les construire » [AT VI, p. 369] [64].

En se confrontant à la résolution des problèmes classiques hérités de l'Antiquité, comme la trisection de l'angle, l'insertion de moyennes proportionnelles, ou la quadrature du cercle, qui ne sont pas résolubles à la règle et au compas, mais aussi aux nouveaux problèmes suscités par l'analyse algébrique moderne, comme le problème des tangentes, les mathématiciens de la période moderne n'ont pu manquer de se poser les questions suivantes : Qu'est ce que résoudre un problème géométrique ? Quelles *méthodes* sont-elles légitimes ? Quand une entité géométrique est-elle connue ou donnée ? En effet, nulle démonstration ne permet de décider quelle construction est la plus légitime en géométrie, au-delà de la règle et du compas.

Henk Bos, dans son ouvrage *Redefining Geometrical Exactness* (Bos (2001)), a ainsi choisi d'étudier la géométrie cartésienne en plaçant le corpus cartésien et, plus largement, le corpus géométrique de l'époque, sous le prisme de la résolution des problèmes. Les réponses aux questions précédentes déterminent ainsi une « interprétation de l'exactitude », qui varie selon les auteurs, et consistent, pour l'essentiel, en une analyse des procédures de construction, débouchant sur la détermination de constructions légitimes et la formulation d'un ensemble de règles à suivre. Comme on l'a vu auparavant, pour Descartes, les problèmes géométriques doivent être construits au moyen de l'intersection des courbes les plus simples parmi celles acceptées en géométrie, qui sont les « courbes algébriques », leur simplicité étant mesurée par le degré de leur équation. Cette genèse d'une théorie des courbes algébriques, attestée dans la *Géométrie* par l'exposé de la méthode des normales au livre II (AT VI, 413-423) et l'emploi de la méthode des coefficients indéterminés, qui connaîtra une féconde postérité dans la seconde moitié du dix-septième [65], procure une autre clef pour interpréter la géométrie cartésienne (cf. Galuzzi (1980) et Giusti (1990)). Un autre point essentiel touche le caractère *fondationnel* des discussions et des arguments employés dans l'interprétation de l'exactitude en géométrie par Descartes et la continuité avec le projet euclidien (cf. (Panza, 2005, p. 1-44) et Panza (2011b)).

L'analyse algébrique en plaçant sur le même plan lignes connues et inconnues, qu'elle a désignées toutes les deux par des lettres, évite ce faisant les défauts de l'analyse géométrique des Anciens signalés par Descartes dans le *Discours de la méthode*, à savoir « fatiguer beaucoup l'imagination » en étant « toujours si astrainte à la consideration des figures » (AT VI, p. 17-18). Néanmoins, l'usage de la méthode cartésienne en géométrie ne va pas sans difficultés, lesquelles sont de différentes na-

64. On retrouve déjà dans les *Regulae* cette attention portée par Descartes à la résolution des problèmes en mathématiques *et* en philosophie : (Descartes, 1977, p. 7) ; (AT X, 367)).

65. Un processus d'*habituation* conduira les mathématiciens à voir l'équation d'une courbe non plus comme un problème et la donnée d'une tâche à accomplir (construire la courbe) mais bien comme une solution, une représentation de la courbe.

tures. Sur le plan philosophique, la contrainte du clair et du distinct, posée dans les règles de la méthode du *Discours*, exclut *a priori* tout recours à des méthodes infinitésimales que requièrent pourtant non seulement les problèmes de quadrature, mais aussi les problèmes inverses des tangentes. Descartes sacrifiera à ses méthodes hors sa *Géométrie* dans la Correspondance[66]. Sur le plan méthodologique, qu'est ce que cela signifie « de parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous » (AT VI, 372) ? S'il est clair que Descartes, au contraire de Fermat qu'on pourrait qualifier, pour aller vite, de *problem solver*, impose à sa méthode « d'adhérer » à la théorie (des équations), celui-ci ne précise pas les préceptes à même de déterminer un tel ordre[67], sinon dans une lettre à la Princesse Elisabeth de novembre 1643 où il indique faire en sorte de n'user que de deux théorèmes, le théorème de Pythagore et le théorème des triangles semblables, pour résoudre un problème géométrique [AT IV, 38-39].

Dans ce même échange épistolaire avec Elisabeth, Descartes insiste sur le fait qu'exhiber l'équation d'un problème géométrique à l'issue de l'analyse algébrique suffit à en produire la solution, dès lors qu'a été précisée dans la *Géométrie* la construction d'une équation similaire *quelconque*[68]. Pourtant, si l'on prend la peine de déterminer l'équation du second degré à laquelle Descartes est conduit par sa méthode, lorsqu'il résout le problème d'Apollonius d'un cercle tangent à trois cercles donnés tangents deux à deux, ce que Descartes se garde bien de faire (il se contente d'indiquer comment on *pourrait* obtenir une telle équation), on est confronté à une équation de 87 termes, chacun formé de 7 facteurs, qui s'avère donc impossible à construire en acte. Cette troisième difficulté fut identifiée, en particulier par Newton, qui écrit dans sa *Geometria Curvilinea* (ca. 1680) :

> Récemment, des hommes désireux d'ajouter aux inventions des Anciens ont réuni l'arithmétique spécieuse [*i.e* l'algèbre] et la géométrie. Le bénéfice qui en résulte est un progrès ample et étendu si l'on a en vue la richesse des productions, mais il est bien moins avantageux si l'on considère l'enchevêtrement des conclusions. En effet, ces calculs, qui procèdent seulement des opérations arithmétiques, expriment très souvent de manière tortueuse des quantités qui sont désignées en géométrie par le tracé d'une seule ligne. ((Newton, 1967-1981, IV, p. 420-422, notre traduction))[69].

66. Il résout ainsi le problème de la quadrature de la cycloïde ou le problème inverse des tangentes de Debeaune dont la solution fait intervenir un logarithme. Cf. respectivement la lettre à Mersenne du 27 juillet 1638 et la lettre à Debeaune du 20 février 1639 [AT II, 257-263 et 514-517]. Sur le traitement mathématique de l'infini chez Descartes, cf. (Vuillemin, 1960, p. 56-76) et Costabel (1985).

67. Suivant (Vuillemin, 1960, p. 135-138), on pourrait considérer que la quatrième règle du *Discours* y pourvoit, si on l'applique à l'ensemble des solutions, car elle requiert de « faire partout des denombremens si entiers », mais cette réponse contentera le philosophe et non le mathématicien — Fermat — qui n'est pas disposé à épuiser toutes les solutions d'un problème pendant qu'il peut se contenter de n'en procurer qu'une.

68. Sur la dialectique équation-construction dans la résolution des problèmes géométriques, on peut voir Maronne (2010).

69. Pour une étude détaillée de la réception critique du programme cartésien de résolution des problèmes géométriques par Newton, cf. (Guicciardini, 2009, en part. p. 59-136). On retrouve le même type de critique chez Leibniz, c'est l'un des points de départ de son projet d'*analysis situs*.

De façon plus générale, la nouvelle algèbre qui s'était développée en particulier en Italie et en France, mais aussi en Allemagne avec l'algèbre cossique, en s'appuyant sur de nouveaux langages symboliques, et en proposant des solutions aux équations du troisième et du quatrième degré qui, le cas échéant, pouvaient faire apparaître de nouvelles quantités (négatives ou imaginaires) dont le statut était problématique, donna lieu à une réception contrastée. En témoignent notamment les nombreuses controverses et débats qui eurent alors lieu en Angleterre [70].

Il peut être intéressant de contraster le programme cartésien avec celui d'autres géomètres de son temps, non moins innovateurs, comme Girard Desargues [71]. Le *Brouillon project*, rédigé dans un style baroque qui ne fait aucune place au symbolisme, introduit en outre une terminologie nouvelle et foisonnante qui emprunte au règne végétal. C'est peu de dire que tout cela n'en a guère facilité la lecture. En voici le propos liminaire :

> Chacun pensera ce qui luy semblera convenable ou de ce qui est icy deduit, ou de la maniere de le deduire, & verra que la raison essaye a cognoistre des quantitez infinies d'une part [...] & que l'entendement s'y pert, non seulement à cause de leurs inimaginables grandeur & petitesse, mais encore à cause que le raisonnement ordinaire le conduit à en conclure des proprietez dont il est incapable de comprendre comment, c'est qu'elles sont ((Desargues, 1639, p. 1) ; (Desargues, 1951, p. 99))

Dans son *Brouillon Project*, Desargues introduit ainsi des points et des droites à l'infini qui échappent à une saisie claire et distincte de l'entendement mais, dans le même temps, lui permettent de traiter de façon *générale* une classe de problèmes et, surtout, de simplifier ses démonstrations par la considération de propriétés invariantes par projection. Desargues ne distingue pas en effet les droites sécantes des droites parallèles qui se rencontrent à l'infini [72]. Cette « communauté de visée » dans la recherche de l'« universalité » du raisonnement est typique de l'époque et peut s'incarner dans des pratiques aussi différentes que celles de Descartes et Desargues (Granger, 1968, p. 43-47).

Mais qu'en est-il de la connaissance de ces quantités infinies et de leur usage ? Cet usage peut-il être néanmoins contrôlé par la raison ? C'est un des problèmes abordés par Pascal dans l'opuscule *De l'Esprit Géométrique* [73]. Selon lui, si la nature des quantités infinies, indivisibles ou droites infinies, demeure étrangère à la raison, on n'en possède pas moins une *connaissance naturelle et première* (OC III, 402-403). D'autre part, « la cause qui rend [les vérités concernant les quantités infinies] incapables de démonstration n'est pas leur obscurité mais au contraire leur extrême évidence » (*ibid.*). On peut opposer ici Pascal à Roberval et son « obstina-

Cf. Leibniz (1995).

70. Cette réception est documentée du point de vue des mathématiques et de la philosophie des mathématiques dans Stedall (2002) et Pycior (2011).

71. Pour des éditions commentées du texte, cf. Desargues (1951) et Desargues (1987). Pour des études sur l'œuvre mathématique de Desargues, on peut consulter l'ouvrage collectif Dhombres et Sakarovitch (1994) ainsi que (Granger, 1968, p. 55-70) sur le « style arguésien ».

72. On ne peut donc qu'être étonné par le jugement, contre toute attente favorable, porté par Descartes dans sa lettre à Desargues du 19 juin 1639 sur la méthode arguésienne (AT II, p. 555).

73. Sur l'épistémologie pascalienne, on consultera avec profit Chevalley (1995).

tion démonstrative » dans les *Éléments de géométrie* (cf. Roberval (1996))[74].

Comment convaincre, par la raison, « des esprits excellents en toutes autres choses, que ces infinités choquent, et qui n'y peuvent en aucune sorte consentir » (*ibid.*) ? En particulier, ceux qui, comme le chevalier de Méré, dénient l'existence de lignes indéfiniment divisibles et considèrent, au contraire, que celles-ci sont formées de parties indivisibles. Pascal assigne cette tâche au raisonnement par l'absurde, auquel il donne le primat, contrairement à la tradition qui lui préfère le raisonnement direct, ostensif, seul à même de révéler la cause[75]. Un raisonnement par l'absurde va ainsi lui permettre de démontrer qu'on ne saurait concevoir une ligne continue formée de parties indivisibles, sauf à tomber dans une contradiction :

> C'est une maladie naturelle à l'homme de croire qu'il possède la vérité directement ; au lieu qu'en effet il ne connaît naturellement que le mensonge et qu'il ne doit prendre pour véritables que les choses dont le contraire lui paraît faux.
>
> Et c'est pourquoi, toutes les fois qu'une proposition est inconcevable, il faut en suspendre le jugement et ne la pas nier à cette marque, mais en examiner le contraire ; et si on le trouve manifestement faux, on peut hardiment affirmer la première, tout incompréhensible qu'elle est (OC III, p. 404)[76].

La géométrie des indivisibles inventée par Cavalieri (cf. Cavalieri (1635)) offre un nouvel exemple de la dialectique de l'ancien et du moderne à l'œuvre dans les mathématiques du XVII^e^ siècle. En effet, cette géométrie fait appel à des sommes de lignes pour quarrer des surfaces, qu'on nomme indivisibles au regard de ces dernières[77]. Le principe est qu'on opère des comparaisons de surface sur la base de la comparaison de leurs indivisibles[78], en se démarquant ainsi de l'orthodoxie euclidienne pour ce qui regarde la contrainte d'homogénéité. Néanmoins, la géométrie des indivisibles se réfère dans le même temps à la méthode d'exhaustion des Anciens qui la fonde au regard de la rigueur. Comme l'écrit Pascal écrit dans un « Avertissement » aux *Lettres de A. Dettonville* (1658) dans lesquelles il propose, anonymement, les solutions des problèmes du concours de la roulette, « tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontre aussi à la rigueur et à la manière des anciens », si bien que « l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler » (OC IV, p. 424).

Cette nouvelle géométrie des indivisibles, développée à l'époque par des auteurs comme Torricelli ou Roberval, prête néanmoins le flanc à des objections visant la

74. Arnauld et Nicole sont en revanche sur la même ligne que Pascal dans leur *Logique* (cf. (Arnauld et Nicole, 2011, p. 566-569)).

75. Cette position remonte à Aristote. Sur le raisonnement par l'absurde, voir Gardies (1991) et (Mancosu, 1996, p. 105-117). Descartes (voir par exemple sa lettre à Mersenne du 27 juillet 1638 (AT II, 273)) et, plus tard, Arnauld et Nicole se démarquent ici de Pascal et se conforment à la tradition (cf. (Arnauld et Nicole, 2011, p. 569-570)).

76. À nouveau, nous abrégeons conformément à l'usage l'édition Pascal (1964-1992) des *Œuvres* de Pascal donnée par Jean Mesnard en [OC].

77. On résout de façon semblable des problèmes de cubature en faisant appel à des sommes de surface, ainsi que des problèmes de centres de gravité.

78. On n'entrera pas ici dans les détails mathématiques faute d'espace. Nous renvoyons à Andersen (1985), (Mancosu, 1996, p. 34-64) et à l'ouvrage collectif Jullien (2015).

rigueur des démonstrations « établies par les hétérogènes » et des calculs afférents, lesquels peuvent parfois conduire à des paralogismes, et va ainsi engendrer de nombreuses controverses qu'on ne peut qu'effleurer ici. Le jésuite André Tacquet affirme ainsi dans son ouvrage *Cylindrica et Annularia* (1651) qu'un usage inconsidéré des indivisibles conduit à des démonstrations manifestement fausses et que « les démonstrations établies par les hétérogènes ne contraignent pas à l'assentiment, à moins qu'on ne les ramène aux homogènes, ce qui est possible dans la plupart des cas »[79]. Cette adaptation de la méthode des indivisibles va précisément être proposée par des auteurs comme Torricelli, Roberval et Pascal qui vont substituer aux lignes des rectangles[80].

Si les mathématiques modernes et contemporaines ne sont guère pensables sans l'usage d'un symbolisme adéquat et omniprésent, force est de constater que ce rôle et cette prépondérance accordés au symbolisme en mathématiques remonte au XVII^e siècle et, en particulier, à Descartes. Symbole d'égalité et parenthèses mis à part, les équations de la *Géométrie* de 1637 nous apparaissent immédiatement lisibles, pendant qu'on ne saurait déchiffrer qu'à grand-peine les équations cubiques de l'*Ars Magna* de Girolamo Cardano paru en 1545 un peu moins d'un siècle auparavant (cf. Serfati (2005)). Dans l'intervalle, on assiste à un foisonnement des systèmes d'écritures symboliques (voir Cajori (1928-1929)). Si l'on remonte encore un peu plus loin, on ne trouve nulle présence de symbolisme dans l'algèbre arabe, par exemple dans le *Livre d'algèbre et d'al-muqābala* d' Al-Khwārizmī paru au IX[e] siècle (cf. Al-Khwārizmī (2007)), où les équations et les algorithmes sont énoncés au moyen de la seule langue naturelle. Il n'est donc pas surprenant qu'on insiste en général sur le rôle fondamental de l'écriture symbolique dans l'invention mathématique au dix-septième siècle. Néanmoins, y compris au dix-septième siècle, on découvre en ouvrant les *Lettres de Dettonville* une « géométrie calculante » mais « littéraire », car dépourvue de symboles et de calculs littéraux (cf. Descotes (2001)). D'autre part, des travaux récents consacrés à Descartes et à son apprentissage en Allemagne de l'algèbre cossique (Manders (1995, 2006)) paraissent montrer que la nouvelle écriture symbolique n'a pas constitué, au moins chez le jeune Descartes, une condition nécessaire à l'élaboration de certains des éléments clefs de sa *Géométrie*, comme la méthode de coefficients indéterminés, *a contrario* de l'hypothèse classique sur l'importance de la notation exponentielle dans l'invention par Descartes de la géométrie analytique. Pour ces raisons, il importe de nuancer une vision « positiviste » et rationalisante *a posteriori* du symbolisme au dix-septième siècle.

7 De l'invention du calcul à l'analyse algébrique

Après le développement de l'analyse algébrique, à la suite de Descartes et Fermat, l'autre événement fondateur de la modernité mathématique est bien évidemment l'invention du calcul différentiel. Elle est le fait de deux mathématiciens illustres :

79. Cité et traduit par (Gardies, 1984, p. 50-51). Sur les critiques de Tacquet, cf. également le chapitre rédigé par Dominique Descotes (Jullien, 2015, Chap. 11, p. 249-274). Parmi les détracteurs de la géométrie des indivisibles, on trouve aussi Guldin : cf. (Mancosu, 1996, p. 50-64) et (Jullien, 2015, Chapitre 4, p. 57-86).

80. Cf. par exemple Pascal, *Lettres de A. Dettonville*, Avertissement (OC IV, p. 424).

Newton, qui élabore son traitement des fluxions au milieu des années 1660 (cf. Panza (2005)), mais ne le publie pas, et Leibniz, qui met au point son algorithme différentiel une dizaine d'années plus tard, puis le rend public en 1684 dans son article célèbre *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* des *Acta Eruditorum* (cf. Leibniz (1989)). Dans un premier temps, ces inventions ne provoquent pas de débats philosophiques très vifs[81]. Il faut dire que l'article de Leibniz est particulièrement sibyllin. Ce n'est que dans la décennie suivante, lorsque les frères Bernoulli commencent à utiliser plus largement le calcul dans la résolution de problèmes de « physico-mathématique » et que paraît le manuel du marquis de l'Hospital (L'Hospital (1696)), que les premières controverses font leur apparition en charriant des critiques sur certains points proprement nouveaux — comme le fait pointé par Nieuwentijt en 1695 que l'on peut considérer des différentielles d'ordre supérieur. Elles prennent une ampleur grandissante à la fin du siècle, dans le contexte de l'Académie des sciences où de vifs échanges se produisent entre partisans du « vieux style » (Rolle, Gallois, Bignon) et adeptes du calcul leibnizien (cf. (Mancosu, 1996, chap. 6)). Dans le même temps, une querelle de priorité oppose les partisans de Leibniz et Newton sur la paternité du calcul (cf. Hall (1980)).

Sur le fond, ces querelles poursuivent sous d'autres formes les débats des périodes antérieures. Il s'agit de savoir si l'analyse peut suffire comme mode de justification sans synthèse pour l'accompagner ; si l'on peut accepter des quantités ne se comportant pas comme les grandeurs euclidiennes ; si un calcul « aveugle » peut valoir pour preuve ; si l'infini peut entrer dans les raisonnements ; si l'on peut se passer de construction, etc. Bien plus, les positions des pères fondateurs sur ces questions, Leibniz et Newton, apparaissent aujourd'hui comme très dépendantes d'un attachement à un idéal de rigueur encore hérité des Anciens[82]. *A contrario*, nombre de disciples de Leibniz (à commencer par les Bernoulli, et plus tard Fontenelle) considèrent qu'il ne faut pas craindre de donner droit de cité à des quantités infinitésimales et infiniment grandes.

C'est en 1748 qu'Euler offre pour la première fois dans son *Introductio in Analysin Infinitorum* Euler (1748) une théorie systématique des fonctions jointe à une somme foisonnante de résultats mathématiques nouveaux, qui inaugurent le programme de l'« analyse algébrique » (voir Fraser (1989); Panza (2007a)). À partir d'Euler, l'analyse ne va plus désigner une forme de raisonnement, ou un ensemble de techniques, mais bien une théorie à part entière dont l'objet est la fonction. D'autre part, l'adjectif 'algébrique' réfère à la part de l'analyse qui peut être développée indépendamment du calcul infinitésimal. Le problème du fondement de l'algorithme du calcul différentiel est en effet une préoccupation majeure pour les mathématiciens du dix-huitième siècle. Euler se soucie ainsi de distinguer, en suivant un précepte épistémologique de pureté, les domaines et les problèmes qui relèvent du calcul infinitésimal ou bien de la seule analyse algébrique. Il précise ainsi qu' « [il a] aussi traité par les méthodes de l'Algèbre commune plusieurs questions, qui sont ordinairement l'objet de l'Analyse infinitésimale afin de rendre plus sensible & plus frappant

81. Leibniz reçoit certes assez vite des critiques du mathématicien Detlev Clüver, mais celles-ci ne lui paraissent pas très profondes et ne donnent pas lieu à un débat public avant leur reprise par un des disciples de Leibniz, Jacob Hermann au tournant du siècle.

82. Voir les articles consacrés à ces auteurs dans Jullien (2015).

l'accord parfait qu'on remarquera dans la suite entre les deux méthodes » (Euler, 1748, Préface, trad. Labey). Cette partition se trouve concrètement réalisée dans les deux tomes de l'*Introductio* : le premier tome est dévolu à un exposé systématique du calcul infinitésimal, centré sur le concept de fonction, celle-ci étant conçue en termes de pure expression symbolique opératoire, sans être distinguée des quantités, pendant que le second tome contient une théorie et une classification des courbes algébriques.

Plus tard, Lagrange, poursuivra le programme d'Euler et le radicalisera en proposant de réduire le calcul infinitésimal à l'analyse algébrique, comme en témoigne le titre de son traité Lagrange (1797) : « Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'evanouissans, de limites et de fluxions, et réduite à l'analyse algébrique des quantités finies ». Ce faisant, Lagrange vise à réduire non seulement la théorie des fonctions mais bien toutes les mathématiques à une théorie algébrique purement formelle des polynômes et des séries formelles grâce à la méthode des coefficients indéterminés (pour plus de détails, cf. Ferraro et Panza (2012)). De fait, la théorie de Lagrange présente des défauts[83] et ne sera jamais vraiment acceptée. Elle sera supplantée par le *Cours d'analyse* de Cauchy et son idéal de rigueur, qui paraît en 1821 à peine plus de vingt après.

8 Conclusion

Nous abandonnons ici le tableau que nous avons brossé à grands traits de la philosophie des mathématiques dans son histoire, depuis l'Antiquité jusqu'à la période moderne, en espérant avoir montré au lecteur la richesse de cette tradition qui, après quelques éclipses, continue à irriguer les développements les plus contemporains de la philosophie des mathématiques.

En guise de conclusion et de transition vers le chapitre suivant, soulignons que les deux questions liées des fondements et de la rigueur prennent une importance croissante et dessinent une nouvelle figure de la philosophie des mathématiques. Il s'agit, en effet, de savoir comment reconfigurer l'ensemble du savoir mathématique de telle sorte qu'il puisse donner place à cette nouvelle analyse qui dépasse le traitement de la quantité finie. À la même époque, Kant élabore une philosophie des mathématiques particulièrement riche, bien que fondée sur les mathématiques de l'ancien monde. Les débats se focalisent alors sur la tension qui s'ouvre entre deux conceptions des fondements assez différentes, celles de Lagrange et de Kant. C'est le début d'une nouvelle période pour la philosophie des mathématiques qui sera traitée dans le chapitre suivant.

Références

Al-Khwārizmī : *Livre d'algèbre et d'al-muqābala.* Blanchard, Paris, 2007. Texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed.

83. Une objection mathématique dirimante au projet de Lagrange tient au fait que toutes les fonctions ne sont pas développables en série entière.

K. ANDERSEN : Cavalieri's method of indivisibles. *Archive for History of Exact Sciences*, 31(4):291–367, 1985.

J. ANNAS : Die gegenstände der mathematick bei aritoteles. *In* A. GRAESER, éd. : *Mathematics and metaphysics in Aristotle : Akten des X. Symposium Aristotelicum, Sigriswil, 6.-12. September 1984*. P. Haupt, Bern, 1987.

APOLLONIUS : *Conicorum libri quattuor, una cum Pappi Alexandrini lemmatibus et commmentariis Eutocii Ascalonitæ.* 2 vols., Bologna, 1566. Édition de F. Commandino.

APOLLONIUS : *Apollonii Pergaei conicorum libri octo et Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni.* Oxford, 1710. Édition de E. Halley.

ARCHIMÈDE : *Archimedis Opera quae extant. Novis demonstrationibus illustrata.* Claudium Morellum, Parisiis, 1615. Édition de D. Rivault.

A. ARNAULD et P. NICOLE : *La logique ou l'art de penser.* Champion, Paris, 2011. Édition critique par Dominique Descotes.

A. BERNARD : Comment définir la nature des textes mathématiques de l'antiquité grecque tardive ? Proposition de réforme de la notion de 'textes deutéronomiques'. *Revue d'Histoire des mathématiques*, 9:131–173, 2003.

J. BIARD et J. CELEYRETTE, éds. *De la théologie aux mathématiques : l'infini au XIVe siècle.* Les Belles Lettres, Paris, 2005.

BOÈCE : *Institution arithmétique.* Les Belles Lettres, Paris, 1995. Texte établi et traduit par Jean-Yves Guillaumin.

H. J. BOS : Arguments on motivation in the rise and decline of a mathematical theory : the "construction of equations", 1637-ca. 1750. *Archive for history of exact sciences*, 30:331–380, 1984.

H. J. BOS : *Redefining Geometrical Exactness. Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction.* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Springer, New York, 2001.

F. CAJORI : *A history of mathematical notations,* 2 vols. The Open Court Publishing Compagny, La Salle, Illinois, 1928-1929. Réédité par Dover, New York, 1993.

B. CAVALIERI : *Geometria indivisibilius continuorum nova quadam ratione promota.* Bologna, 1635. Seconde édition, Bologna, 1650.

C. CHEVALLEY : *Pascal. Contingence et probabilités.* PUF, Paris, 1995.

P. COSTABEL : Descartes et la Mathématique de l'Infini. *Historia Scientiarum,* (29):37–49, 1985.

P. CROZET : De l'usage des transformations géométriques à la notion d'invariant : La contribution d'al-sijzī. *Arabic Sciences and Philosophy*, 20(1):53–91, 2010.

A. De Pace : *Le Matematiche e il mondo.* Francoangeli, Milan, 1993.

V. De Risi : *Leibniz on the parallel postulate and the foundations of geometry.* Birkhäuser, Basel, 2016.

G. Desargues : *Brouillon project d'une atteint aux evenemens des rencontres du Cône avec un Plan.* Paris, 1639. Le nom d'auteur indiqué est 'LSGDL' pour 'Le Sieur Girard Desargues de Lyon'.

G. Desargues : *L'oeuvre mathématique de G. Desargues.* PUF, Paris, 1951. Édité par René Taton.

G. Desargues : *The Geometrical Work of Girard Desargues.* Springer, New York, 1987. Édition de Judith V. Field et Jeremy Gray.

R. Descartes : *Œuvres de Descartes.* 11 vols., Vrin, Paris, 1964-1974. Édition de Charles Adam et Paul Tannery, nouvelle présentation par Bernard Rochot et Pierre Costabel. Abrégé [AT].

R. Descartes : *Règles utiles et claires pour la direction de l'esprit et la recherche de la vérité.* M. Nijhoff, La Hague, 1977. Traduction selon le lexique cartésien, et annotation conceptuelle par J.-L. Marion avec des notes mathématiques de P. Costabel.

D. Descotes : *Blaise Pascal. Littérature et géométrie.* CERHAC. PUBP, Clermont-Ferrand, 2001.

M. Detlefsen : Formalism. *In* S. Shapiro, éd. : *The Oxford handbook of philosophy of mathematics and logic*, p. 236–317. Oxford University Press, 2005.

J. Dhombres et J. Sakarovitch, éds. *Desargues en son temps*, Paris, 1994. Librairie Albert Blanchard.

O. Dubouclez : *Descartes et la voie de l'analyse.* Epiméthée. PUF, Paris, 2013.

G. Dye et B. Vitrac : Le *Contre les géomètres* de Sextus Empiricus : sources, cible, structure. *Phronesis*, 54(2):155–203, 2009.

Euclide : *Elementorum Libri XV accessit XVI de solidum regularium cuiuslibet intra quodlibet comparatione.* Apud Sanctium & Soc., Romae, 1589. Édition de C. Clavius.

L. Euler : *Introductio in Analysin Infinitorum,* 2 vols. Apud Marcum-Michælem Bousquet & Socios, Lausanne, 1748. *Opera Omnia*, ser. I, vols. 8 et 9. Trad. française par J.-B. Labey : L. Euler, *Introduction à l'analyse des infinitésimale*, Paris, Barrois aîné, 1796-1797.

J. Feke : *Ptolemy's Philosophy : Mathematics as a Way of Life.* Princeton University Press, Princeton, 2018.

G. Ferraro et M. Panza : Lagrange's theory of analytical functions and his ideal of purity of method. *Archive for History of Exact Sciences*, 66(2):95–197, 2012.

C. G. Fraser : The calculus as algebraic analysis : some observations on mathematical analysis in the 18th century. *Archive for History of Exact Sciences*, 39 (4):317–335, 1989.

M. Galuzzi : Il Problema delle Tangenti nella "Géométrie" di Descartes. *Archive for history of exact sciences*, 22:37–51, 1980.

J.-L. Gardies : *Pascal entre Eudoxe et Cantor*. Problèmes et Controverses. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 1984.

J.-L. Gardies : *L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide*. Problèmes et Controverses. Vrin, Paris, 1988.

J.-L. Gardies : *Le raisonnement par l'absurde*. PUF, Paris, 1991.

J.-L. Gardies : *Qu'est-ce que et pourquoi l'analyse ? Essai de définition*. Problèmes et Controverses. Librairie Philosophique J. Vrin, Paris, 2001.

E. Giusti : Numeri, grandezze e Géométrie. *In* G. Belgioioso *et al.*, éds : *Descartes, Il metodo e i saggi. Atti del Convegno per il 350e anniversario della pubblicazione del Discours de la Méthode e degli Essais, 2 vols.*, p. 419–439, Firenze, 1990. Armando Paoletti.

E. Giusti : *Euclides Reformatus : La teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*. Bollati Boringhieri, Turin, 1993.

G.-G. Granger : *Essai d'une philosophie du style*. Philosophies pour l'âge de la science. Librairie Armand Colin, Paris, 1968.

E. Grosholz et H. Breger : *The Growth of Mathematical Knowledge*. Synthese Library. Springer Netherlands, 2000.

S. Gryneaus : *Commentarium Procli editio prima quae Simonis Grynaei opera addita est Euclidis elementis graece editis. Adjecta praefatiuncula in qua de disciplines mathematicis nonnihil*. J. Hervagius, Basel, 1533.

N. Guicciardini : *Isaac Newton on mathematical certainty and method*. MIT Press, Cambridge, MA and London, 2009.

A. R. Hall : *Philosophers at war : the quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge University Press, Cambridge, 1980.

O. Harari : The concept of existence and the role of constructions in Euclid's *Elements*. *Archive for History of Exact Sciences*, 57:1–23, 2003.

M. O. Helbing : La fortune des commentaires de Proclus sur le premier livre des Éléments d'Euclide à l'époque de Galilée. *In* G. Bechtle et D. O'Meara, éds : *La Philosophie des mathématiques de l'Antiquité tardive, 2000*, p. 173–193. Éditions universitaires de Fribourg, 2000.

G. Israel : Des *Regulae* à la *Géométrie. Revue d'Histoire des Sciences*, 51(2-3):183–226, 1998.

D. M. Jesseph : *Squaring the circle. The War between Hobbes and Wallis.* The University of Chicago Press, Chicago and London, 1999.

V. Jullien, éd. *Seventeenth-Century Indivisibles Revisited.* Science Networks Historical Studies 49. Birkhäuser, Cham, 2015.

A. Koyré : *Études d'histoire de la pensée scientifique.* Gallimard, Paris, 1985.

J.-L. Lagrange : *Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'evanouissans, de limites et de fluxions, et réduite à l'analyse algébrique des quantités finies.* Impr. de la République, Paris, 1797.

P. Lamandé : Quelques conceptions de la théorie des proportions dans des traités de la seconde moitié du dix septième siècle. *Archive for History of Exact Sciences*, 67:595–636, 2013.

G. W. Leibniz : *Die Philosophische Schriften,.* Halle, 1875-1899. Édition de C. Gerhardt. Réédition Hildesheim, New York, Olms, 1987. Abrégé [GP].

G. W. Leibniz : *Sämtliche Schriften und Briefe, herausgegeben von der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin.* Akademie-Verlag, Berlin, 1923-. Abrégé [A].

G. W. Leibniz : *La naissance du calcul différentiel : 26 articles des Acta Eruditorum.* Mathesis. Vrin, Paris, 1989. traduit et annoté par M. Parmentier.

G. W. Leibniz : *La caractéristique géométrique.* Mathesis. Vrin, Paris, 1995. Texte établi, introduit et annoté par Javier Echeverría, traduit, annoté et postfacé par M. Parmentier.

G.-F.-A. d. L'Hospital : *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes.* De l'Imprimerie Royale, Paris, 1696.

F. Loget : Jacques Peletier du Mans mathématicien. L'angle de contact. *Nouvelle Revue du Seizième Siècle*, 20 (2):5–55, 2002.

F. Loget : La digression sur l'angle de contact dans le *Libro de Algebra* (1567) de Pedro Nuñez. *Quaderns d'Història de l'Enginyeria*, 11:79–100, 2011.

F. Loget : La contribution de François Viète au débat sur l'angle de contact. *Archives internationales d'histoire des sciences*, 63:391–410, 2014.

P. Mancosu : *Philosophy of mathematics and mathematical practice in the seventeenth century.* Oxford University Press, New York, 1996.

P. Mancosu : Literature survey : Recent publications in the history and philosophy of mathematics from the Renaissance to Berkeley. *Metascience*, 8(1):102–124, 1999.

P. Mancosu : *The philosophy of mathematical practice.* Oxford University Press, Oxford, 2008.

K. Manders : Descartes et Faulhaber. *Archives de philosophie*, 58:1–12, 1995.

K. Manders : Algebra in Roth, Faulhaber, and Descartes. *Historia Mathematica*, 33:184–209, 2006.

J. Mansfeld : *Prolegomena Mathematica : From Apollonius of Perga to the Late Neoplatonism. With an Appendix on Pappus and the History of Platonism.* Brill, 1998.

S. Maronne : Les controverses sur le problème de Pappus dans la Correspondance de Descartes : 1637-1649. *In* F. Marrone, éd. : *DesCartes et DesLettres. 'Epistolari' e filosofia in Descartes e nei cartesiani*, p. 62–91, Firenze, 2008. Le Monnier.

S. Maronne : Pascal versus Descartes on solution of geometrical problems and the Sluse-Pascal correspondence. *Early Science and Medicine*, 15(4-5):537–565, 2010.

S. Maronne : Les Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes (1730) de Claude Rabuel. *In Autour de Descartes et Newton. Le paysage scientifique lyonnais dans le premier* XVIII*e* *siècle*, p. 111–161. Hermann, Paris, 2017.

E. Mazet : Les sophistes et la géométrie. *Revue de Philosophie Ancienne*, (2):201–224, 1994.

P. Merlan : *From platonism to neoplatonism.* M. Nijhoff, La Haye, 1960.

A. Michel : Géométrie et philosophie : de Thābit ibn Qurra à Ibn Al-Haytham. *Arabic sciences and philosophy*, 13(2):311–315, 2003.

I. Mueller : Mathematics and philosophy in Proclus' commentary on book I of euclid's Elements. *In* J. Pépin et H. D. Saffrey, éds : *Proclus lecteur et interprète des anciens*, p. 305–318. Édition du CNRS, Paris, 1987.

I. Mueller : Aristotle's doctrine of abstraction in the commentators. *In* R. Sorabji, éd. : *Aristotle Transformed*, p. 463–479. Ithaca, Cornell University Press, 1990.

J. Murdoch : *"Rationes mathematice" : un aspect du rapport des mathématiques et de la philosophie au Moyen Age.* Université de Paris, Palais de la découverte, Paris, 1962.

J. Murdoch : Mathesis in philosophiam scholasticam introducta. the rise and development of the application of mathematics in fourteenth century philosophy an theology. *In Arts libéraux et philosophie au Moyen-âge : actes du quatrième congrès international de philosophie médiévale, Université de Montréal, 27 août-2 septembre 1967*, p. 215–254, Montréal-Paris, 1969. Institut d'Etudes médiévales-Vrin.

R. Netz : *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History.* Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne, 1999.

I. Newton : *The Mathematical Papers of Isaac Newton (8 vol.).* Cambridge University Press, Cambridge, 1967-1981. Édition de D.T. Whiteside.

F. Nietzsche : *Seconde considération intempestive : de l'utilité et de l'inconvénient des études historiques pour la vie (1874)*, vol. 483. Flammarion, 1988. trad. fr. Pierre-Yves Bourdil.

D. J. O'Meara : *Pythagoras revived.* Clarendon Press, Oxford, 1989.

M. Panza : Classical sources for the concepts of analysis and synthesis. *In* M. Panza et M. Otte, éds : *Analysis and synthesis in Mathematics. History and Philosophy*, p. 365–414. Kluwer A. P., Dordrecht, Boston London, 1997.

M. Panza : *Newton et les origines de l'analyse : 1664-1666.* Blanchard, Paris, 2005.

M. Panza et M. Otte, éds. *Analysis and synthesis in Mathematics. History and Philosophy.* Kluwer, Dordrecht, Boston London, 1997.

M. Panza : Euler's *Introductio in analysin infinitorum* and the program of algebraic analysis : quantities, functions and numerical partitions. *In* R. Backer, éd. : *Euler reconsidered. Tercentenary essays.* Kendrick Press, Heber City (Utah), 2007a.

M. Panza : What is new and what is old in Viète's *analysis restituta* and *algebra nova*, and where do they come from ? Some reflections on the relations between algebra and analysis before Viète. *Revue d'Histoire des Mathématiques*, 13(2), 2007b.

M. Panza : Breathing fresh air into the philosophy of mathematics. *Metascience*, 20(3):495–500, 2011a.

M. Panza : Rethinking geometrical exactness. *Historia Mathematica*, 38:42–95, 2011b.

M. Panza et A. Sereni : *Introduction à la philosophie des mathématiques.* Flammarion, 2013.

Pappus : *Pappi Alexandrini mathematicae collectiones.* Apud Hieronymum Concordiam, Pisauri, 1588. Éd. de F. Commandino.

B. Pascal : *Oeuvres Complètes* (vols. I à IV parus). Bibliothèque Européenne. Desclée de Brouwer, Paris, 1964-1992. Édition de Jean Mesnard (établissement du texte, présentation et annotation). Abrégée [OC].

R. Pettigrew : Aristotle on the subject matter of geometry. *Phronesis*, 54(3):239–260, 2009.

A. Piccolomini : *Commentarium de Certitudine Mathematicarum Disciplinarum.* Antonium Bladum Asulanum, Roma, 1547.

PROCLUS : *In primum Euclidis Elementorum librum commentarii.* B. G. Teubner, Lipsiæ, 1873. Ex recognitione G. Friedlein. Abrégé [F].

H. M. PYCIOR : *Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements. British Algebra through the Commentaries on Newton's Universal Arithmetick.* Cambridge University Press, Cambridge, 2011.

D. RABOUIN : Le rôle de Proclus dans les débats sur la 'mathématique universelle' à la Renaissance. *In* A. LERNOULD, éd. : *Études sur le Commentaire de Proclus au premier livre des Éléments d'Euclide*, p. 217–234. Presses du Septentrion, Lille, 2010.

D. RABOUIN : *Mathesis Universalis : L'Idée de « Mathématique Universelle » d'Aristote à Descartes.* P.U.F., Paris, 2009.

D. RABOUIN : *Mathesis*, Méthode, Géométrie chez Descartes. *In* E. CASSAN, F. de BUZON et D. KAMBOUCHNER, éds : *Lectures de Descartes.* Ellipses, Paris, 2015a.

D. RABOUIN : Proclus' conception of geometric space and its actuality. *In* V. DE RISI, éd. : *Mathematizing Space*, p. 105–142. Birkhäuser, Basel, 2015b.

R. RASHED : *Les mathématiques infinitésimales du IXe au XIe siècles, vol. IV : Méthodes géométriques, transformations ponctuelles et philosophie des mathématiques.* al-Furqān Islamic Heritage Foundation, London, 2002.

R. RASHED : Les premières classifications des courbes. *Physis*, XLII(1):1–64, 2005. Publié également dans (Rashed, 2011, p. 133-194).

R. RASHED : *D'Al-Khwārizmī à Descartes : Études sur l'histoire des mathématiques classiques.* Hermann, Paris, 2011.

R. RASHED : L'angle de contingence : Un problème de philosophie des mathématiques. *Arabic Sciences and Philosophy*, 22 (1):1–50, 2012.

R. RASHED : *Angles et grandeur : D'Euclide à Kamāl al-Dīn al-Fārisī.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2015.

G. P. d. ROBERVAL : *Eléments de géométrie.* Mathesis. Vrin, Paris, 1996. Édition de Vincent Jullien.

S. ROMMEVAUX : *Clavius : une clé pour Euclide au XVIe siècle.* Vrin, Paris, 2005.

S. ROMMEVAUX : Un débat dans les mathématiques de la Renaissance : le statut de l'angle de contingence. *Journal de la Renaissance*, 4:291–302, 2006.

C. SASAKI : The acceptance of the Theory of Proportion in the Sixteenth and the Seventeenth centuries. *Historia Scientiarum*, 29:83–116, 1985.

G. SCHUBRING : *Conflicts Between Generalization, Rigor, and Intuition : Number Concepts Underlying the Development of Analysis in 17th-19th Century France and Germany.* Springer, New-York, 2005.

M. Serfati : Les compas cartésiens. *Archives de philosophie*, 56:197–230, 1993.

M. Serfati : *La Révolution symbolique. La constitution de l'écriture symbolique mathématique.* Petra, Paris, 2005.

E. Sergio : *Verità matematiche e forme della natura da Galileo a Newton.* Aracne, Roma, 2006.

J. A. Stedall : *A Discourse Concerning Algebra. English algebra to 1685.* Oxford University Press, Oxford, 2002.

Théon de Smyrne : *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon.* Hachette, Paris, 1892. Trad. fr. J. Dupuis.

B. Van Kerkhove et J. P. Van Bendegem : *Perspectives on mathematical practices : bringing together philosophy of mathematics, sociology of mathematics, and mathematics education*, vol. 5. Springer Science & Business Media, 2007.

B. Van Kerkhove, J. P. Van Bendegem et J. De Vuyst : *Philosophical perspectives on mathematical practice.* College publications, 2010.

F. Viète : *In artem analytice Isagoge.* I. Mettayer, Tours, 1591.

B. Vitrac : L'interprétation mathématique du dilemme du cône (DK 68 B 155). Démocrite était-il mathématicien ? *Cahiers Philosophiques de Strasbourg*, 12:89–129, 2001.

J. Vuillemin : *Mathématiques et Métaphysique chez Descartes.* Epiméthée. PUF, Paris, 1960.