Gödel's intuitionistic paradoxes

Mark van Atten

Gödel's intuitionistic paradoxes

Mark van Atten*

May 3, 2021

There is a paradox associated with Gödel that comes in both a classical and an intuitionistic version. The classical version was published by Wang in his *Logical Journey* (Cambridge, MA: MIT Press, 1996), on the basis of his conversation with Gödel of October 18, 1972 (pp. 278–279). Gödel on that occasion mentioned the existence of the intuitionistic version, but it did not end up in Wang's book. Here are presented, from Gödel's archive:

1. For reference: the classical version in Gödel's own presentation (Figure 1). Gödel named it, to Wang, 'Church's Paradox', 'because it is most easily set up in Church's system', whereas Wang proposes to call it 'Gödel's Paradox' (p. 279).

2. The intuitionistic version (Figure 2), which was written on the back of the classical one. At the same time, it reads like an adaptation of the paradox Kreisel gave in 2.152 of his 'Mathematical logic', in T. Saaty (ed.), *Lectures on Modern Mathematics*, vol. 3, New York: Wiley and Sons, 1965.

3. A related intuitionistic paradox (Figure 3), which comes close to Troelstra's Paradox; the latter was first published in section 16.8 of Troelstra's *Principles of Intuitionism*, Berlin: Springer, 1969.

The purpose of the present document is to make this source material available; a philosophical and historical discussion of the four paradoxes mentioned in items 2 and 3 above is contained in a paper that I hope to publish soon.

In the transcriptions, italics are used for words Gödel wrote in longhand, and brackets ⟨...⟩ to mark editorial amendations.

The original notes are found, with some related ones, in an envelope that Gödel marked 'Antin⟨omien⟩ des Intuit⟨ionismus⟩ und der abs⟨oluten⟩ Beweisbarkeit'. A note has been added on the envelope to state that it was filed with the Wang correspondence. Finally, Gödel marked it, in shorthand, 'erläutert'; I take this to be a reference to the conversation that Wang reports on.

The envelope and the notes in it have the collective item number 060772, and are kept in box 12, folder 52 ('Unclassified loose notes') of the Gödel Papers at the Firestone Library in Princeton.

Questions, comments, and corrections welcome.

Acknowledgement. Work of Kurt Gödel used with permission of the Institute for Advanced Study. Unpublished Copyright (1934–1978) Institute for Advanced Study. All rights reserved by the Institute for Advanced Study. In the person of Marcia Tucker, I thank the Institute for Advanced Study for giving permission to publish these transcriptions. The copyright to the transcriptions lies with the transcriber. Thanks to Robin Rollinger for advice on the Gabelsberger shorthand. These transcriptions are a small by-product of the ongoing project, led by Gabriella Crocco (Aix-Marseille Université), to transcribe and make freely available Gödel's *Max Phil* notebooks.[1]

*Archives Husserl (CNRS / ENS), 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France. mvanatten@ens.fr.

[1]Search engine terms: hal gödel max phil notebooks.

Bew⟨eis⟩ (0.):

Df. von E:

$$E(x) = 0 \text{ wenn } x \neq 0$$
$$E(0) = 1 \qquad\qquad \text{dann } \underline{E(x) \neq x}.$$

$a = b$ bedeutet: *a is the object b*

Church Antinomie

Df. 0. Überall definierte Funktion.

Th. 1. Es gibt überall definierte Funktionen, zum Beispiel $I(x), E(x), =$ (von 2 Variablen).[a]

Df. 2. $\underline{F \,.\, x = F(x)}$ wenn F eine überall definierte Funktion ist, sonst $= 0$.

Th. 3. . ist eine überall definierte Funktion[b] und $\underline{F \,.\, x =_x F(x)}$ für überall definierte Funktion⟨en⟩ F.

Df. 4. $\underline{H(x)} = E(x \,.\, x)$. H ist ⟨eine⟩ überall definierte Funktion.

$$\textit{Th.} \begin{cases} \quad 5.\ \ H(x) = H \,.\, x = E(x \,.\, x) \\ \quad 6.\ \ H \,.\, H = E(H \,.\, H) \\ \text{andererseits} \quad \text{''} \ \neq \ \text{''} \end{cases}$$

[a] Above these three examples: 'sind überall definiert'.

[b] Above the word 'Funktion', there is an arrow leading to 'alle', written above this line. That seems to be the beginning of an unfinished comment.

Figure 1: Gödel's Paradox (classical).

Antin⟨omie⟩ im *Intuit*⟨ionismus⟩

Df. überall definierte Funktion[x] (unentscheidbar)
+ Beispiele

Df. Wenn f ein Paar $<B, g>$, B ein Beweis ist, dass das Verfahren g überall zum Resultat führt:

$$\begin{aligned} f\,.\,x \ &=_{Df} g(x) \\ \text{sonst} &=_{Df} 0 \end{aligned}$$

Th. . ist überall definiert.

(0.) Es gibt ein nachweislich überall definiert⟨es⟩ E so, dass $E(x) \neq x$ (siehe Rückseite).[a]

(1.) Es gibt ein H so, dass:

$$\begin{aligned} H\,.\,x &= E(x\,.\,x). \text{ Dann ist:} \\ H\,.\,H &= E(H\,.\,H) \\ \text{andererseits } H\,.\,H &\neq E(H\,.\,H) \end{aligned}$$

Bew⟨eis⟩ (1.):
Es gibt ein überall definiertes Verfahren G so, dass $G(x) = E(x\,.\,x)$. Also: es gibt einen Beweis B der zeigt, dass G ein überall definiertes Verfahren ist. $H =_{Df} <B, G>$. Dann: $H\,.\,x = G(x) = E(x\,.\,x)$.

[x]Funktion = Operation = Verfahren (Regel der Verwertbarkeit = Erstellung einer Reihe von Gedanken).

[a]The other side is given in Figure 1. The words 'nachweislich überall definiert⟨es⟩' are written above the line, with an arrow pointing to it from 'ein'.

Figure 2: Gödel's Paradox (intuitionistic).

Bew⟨eis⟩-Begriff im Intuit⟨ionismus⟩.[a]
(zeitabhängig)

Df. Eine Funktion ist etwas, von dem erkannt wurde, dass es immer[b] einen
$\mathfrak{A}_t(f)$ $f(x)_t$
definierten Wert hat, wenn ein Argument gegeben ist (aber wenn darin ⟨das⟩ Argument zeitlich gegeben ist, kann sie einen anderen Wert ⟨annehmen⟩)

$t = 0$ *Th.* $F(x) = 0, F(0) = 1$ ist eine Funktion
$\mathfrak{A}_{0t}(F)\ x =_t y \equiv x =_{t_1} y$
1 *Th.* $(f \,.\, x)_t = 0$ wenn ein $\mathfrak{A}_{0t}(f)$ ⟨zeitabhängig ist⟩
= Wert wenn $\mathfrak{A}_{0t}(f)$ zeitunabhängig
. ist eine zeitabhängige Funktion für $t > 1$
2 *Th.* $F(f \,.\, f_t)$ ist eine Funktion G für[c] $t > 2$
$G \,.\, f_t = F(f \,.\, f)_t$ gilt jederzeit
Th. $G \,.\, G = F(G \,.\, G)$

Zeitabhängigkeit von $x \,.\, y$ (= Anwendung)
(andere Methode der „Einsicht“ beziehungsweise des Errechnens)

[a] This title and the parenthesis are the text on one side of the paper, the rest that on the other.
[b] The sign for this word is written above one that has been crossed out.
[c] To the left of 'für', some signs have been crossed out.

Figure 3: Gödel's Paradox (intuitionistic, time-dependent).