# Pourquoi la gamme a sept notes ? Une mathématique des notes et des gammes

François Dubois

# Pourquoi la gamme a sept notes ?
# Une mathématique des notes et des gammes

François Dubois
mathématicien appliqué, amateur de musique
Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris

14 novembre 2022*

## Résumé

Nous proposons une construction algébrique des notes de musique et montrons comment les associer de diverses façons pour former des gammes. Ainsi émerge toute une famille de gammes avec un nombre fixé de notes : deux, trois, cinq, sept, douze, dix-sept, *etc.* La classification des gammes est simple avec le concept de structure multiplicative. L'action d'une structure multiplicative sur une note permet de définir une tonalité. Le classement des structures multiplicatives est alors facile avec les notions de type et de mode. Nous détaillons le cas des gammes à cinq et sept notes et proposons des exemples musicaux pour toute une variété de modes.

## Abstract

We present an algebraic construction of music notes and show how to associate them in several ways to construct music ranges. Then a family of ranges emerge with a fixed number of notes : two, three, five, seven, twelve, seventeen, *etc.* A classification of these scales is simple with the concept of multiplicative structure. The action of such a multiplicative structure on a music note introduces the definition of tonality. Multiplicative structure classification is then straightforward with the notions of type and mode. We detail the case of music scales with five and seven notes and propose musical examples for a wide range of modes.

**Mots-clefs :** Pythagore, type, mode, tonalité, transposition.

---

* Édition remaniée d'un texte de novembre 1999 : « Une mathématique des notes et des gammes ou pourquoi la gamme a sept notes ? ».

# Introduction

L'être humain a toujours cherché à imiter la musique offerte par la nature : chant des oiseaux, souffle du vent, clapotis des vagues, *etc.* La voix humaine permet d'ailleurs une infinité de modulations et d'expressions sonores. La musique peut aussi être fabriquée avec des objets : un os percé de trous bouchés à volonté permet d'émettre différents sons reproductibles, des notes de musique. Les notes de musique diffèrent par leur hauteur, leur puissance, leur timbre, leur durée. De plus, des sons spécifiques sont parfois émis par des outils. Ainsi, un simple arc met en tension une corde qui vibre lors du départ de la flèche et peut devenir musical pour peu qu'on le dote d'un résonateur, comme on en constate encore l'usage aujourd'hui dans des sociétés dites primitives... La hauteur du son émis dépend de la tension du fil et de la longueur de la corde. Cet instrument de musique fondamental reste une référence pour la construction formelle de la musique avec le monocorde, un instrument à une seule corde. La recherche d'instruments qui produisent des sons harmonieux, de la musique, est une quête qui a traversé toutes les époques et toutes les civilisations.

Une fois créée, une musique agréable à l'oreille doit pouvoir être reproduite. D'où une recherche d'un langage musical, avec une codification propre à chaque culture. Structurer cette musique à l'aide de modèles mathématiques a probablement commencé avant même l'écriture et Marc Chemiller (2007) a exploré les difficultés pour expliciter ces mathématiques naturelles. Ainsi, Pythagore de Samos ($-582$-$-496$), en plus de son célèbre théorème, nous a transmis une codification des notes de musique et de leur assemblage, une gamme. La « gamme de Pythagore » permet de développer un vocabulaire spécifique pour la musique qui sert de référence à l'écriture musicale durant tout le moyen-âge. Elle est fondée sur l'intervalle de quinte (entre le *do* et le *sol* typiquement) et fait apparaître la fraction $3/2$. Nous y reviendrons. Si aucun écrit de Pythagore ne nous est parvenu, Aristoxène de Tarente, philosophe grec du 4e siècle avant Jésus-Christ, actif vers $-330$, est l'auteur d'un des premiers ouvrages sur l'harmonie musicale qui nous ait été transmis.

Gioseffo Zarlino (1517-1590) publie en 1558 un traité de musique qui fait la synthèse des connaissances théoriques et pratiques de son époque. Surtout, il remet en cause l'intervalle de tierce (intervalle entre le *do* et le *mi* par exemple) utilisé depuis Pythagore au bénéfice de la tierce majeure caractérisée par un rapport de hauteurs égal à $5/4$. Zarlino propose ainsi une « gamme naturelle » qui utilise la tierce majeure et la quinte. Mais l'émergence des instruments à clavier, où le musicien a accès à un ensemble prédéfini de notes de musique, a demandé des compromis entre l'esthétique des accords et la complexité de la gamme naturelle.

Ce compromis délicat, ce choix du « tempérament », a donné lieu à de très nombreux travaux théoriques et pratiques depuis plusieurs siècles. Dans leur ouvrage didactique, Claude Abromont et Eugène de Montalembert (2001) présentent près de 600 traités sur la théorie de la musique en occident, certains proposés par des compositeurs majeurs ou des mathématiciens très célèbres par ailleurs. Il est bien sûr hors de question d'être exhaustif ici. Nous avons simplement choisi quelques ouvrages qui nous semblent très importants. Ainsi, Marin Mersenne (1588-1648) a l'intuition de la nécessité d'un tempérament égal (1636), Simon Stevin (1548-1620), avec son traité sur l'art de chanter retrouvé au 19e siècle, propose une division de l'octave en douze intervalles égaux, tout comme son contemporain en Orient Zhu Zaiyu (1536-1611) avec un ouvrage sur le tempérament égal (voir par exemple la thèse de Woo Shingkwan, 2017). Enfin, Andreas Werckmeister (1645-1706), propose (1691) le développement d'un tempérament égal qui permet de transposer sans difficulté un morceau de musique d'une hauteur à une autre, mais au détriment de tierces souvent bien loin de l'état pur et de quintes parfois très fortement réduites. Pour les liens entre divers tempéraments et « Le clavier bien tempéré » de Jean-Sébastien Bach, nous renvoyons au travail de Johan Broekaert (2021).

Au 18e siècle, Jean-Philippe Rameau (1683-1764), célèbre compositeur français, propose en 1722 son *Traité de l'harmonie* qui sera suivi de plusieurs autres ouvrages. La structure des accords de tierce et de quinte sert d'hypothèse pour développer une théorie de l'harmonie qui aura une grande influence. Et Friedrich Marpurg (1718-1795) lui répond dans son traité de 1776. Au 19e siècle, Robert Bosanquet (1841-1912) propose (1876) une distinction entre le tempérament égal et un tempérament bien tempéré. Enfin, Hugo Riemann (1849-1919) publiera plus de 60 ouvrages, dont son célèbre *Lexique musical* (1882).

Au 20e siècle, les recherches sur la mise en forme de l'écriture musicale se poursuivent. Le compositeur Arnold Schönberg (1874-1951), inventeur du dodécaphonisme, écrit aussi un traité sur l'harmonie classique (1911) et Ivan Wyschnegradsky (1893-1979) formalise l'emploi de quarts de tons (1932). Alain Daniélou (1907-1994), étudie la musique indienne sur le terrain et publie un traité de musicologie (1959), Jacques Chailley (1910-1999) présente l'imbroglio des modes (1960) et Iannis Xenakis (1922-2001) introduit de nombreux modèles de la physique et des mathématiques dans la formalisation de l'écriture musicale ; un de ses ouvrages majeurs est publié en 1963.

Dans son article sur les gammes naturelles (1999), Yves Hellegouarch (1936-2022) donne une formalisation mathématique de la notion de tempérament avec des éléments de théorie des groupes, également présente dans la thèse de Moreno Andreatta (2003). À partir d'une approche volontairement élémentaire, Michel Broué (2002) montre que la gamme classique émerge des douze notes du système tempéré de la gamme occidentale. À l'aide d'une méthode d'analyse spectrale originale, Thomas Hélie a développé avec ses collègues de l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique le « snail », un outil logiciel et matériel d'analyse et de visualisation du son (2016). Enfin, André Calvet propose (2020) une vaste fresque sur l'histoire de la musique et des tempéraments.

Suite à tous ces développements très érudits et subtils, il ne semble pas raisonnable de proposer une autre façon de structurer divers éléments de l'écriture de la musique avec un système formel. Mais sans avoir connaissance de tout ce corpus musicologique, nous avons proposé il y a une vingtaine d'années une façon assez simple de construire à la fois des notes et des gammes. Nous la reproduisons dans les paragraphes qui suivent, à quelques variantes près de présentation et de rédaction.

Nous nous donnons d'abord une toute première note de référence (paragraphe 1). À partir du premier harmonique, de la quinte, une première gamme très primitive apparaît, avec seulement deux notes (paragraphe 2). Avec ces deux premières notes, la construction itérative de la suite des quintes au paragraphe 3 permet d'expliciter une suite infinie de notes, en retrouvant essentiellement la construction initiale de Pythagore. Repartant de la gamme à deux notes, de l'intervalle de quinte et de son intervalle complémentaire, la quarte, il est alors naturel de diviser la quinte par la quarte afin de faire apparaître une nouvelle gamme qui comporte trois notes (paragraphe 4).

On recommence ensuite ce processus de « brisure de ton » et l'on coupe le plus grand des deux intervalles d'une gamme à trois notes par le plus petit. On obtient au paragraphe 5 une famille de gammes à cinq notes. Nous présentons ensuite la construction récurrente non linéaire d'une famille infinie de gammes (paragraphe 6). À partir du principe de découpage en deux parties du plus grand des intervalles d'une gamme donnée par le plus petit, nous mettons en évidence quelques propriétés mathématiques au paragraphe 7 et tentons de mettre un peu d'ordre dans la multiplicité de choix possibles aux paragraphes 8 et 9. De façon incidente, nous trouvons que le nombre de notes de la famille de gammes qui suit les gammes pentatoniques n'est pas égal à 8, nombre suivant 5 dans la suite de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, *etc.* et serait apparu avec un algorithme linéaire de découpage. Nous explicitons au dernier paragraphe les 21 gammes à sept notes qui commencent par une note de référence, avant une conclusion. En Annexe, nous avons regroupé la preuve d'une proposition un peu technique et une tentative de construction d'une gamme à huit notes.

## 1) Note de référence

La musique est écrite avec des notes. Du point de vue de la modélisation acoustique, une « note » est une variation de pression au cours du temps caractérisée par une fenêtre temporelle qui définit la durée de la note et par une fréquence caractéristique de la « hauteur » du son. Du point de vue mathématique, notre modèle de note de musique est une fonction périodique du temps, de pulsation $\omega$ appelée abusivement dans la suite « fréquence $\omega$ », de période $T = 2\pi/\omega$ dupliquée quelques centaines de fois pour les fréquences sonores habituelles. Nous ne nous intéressons pas ici au timbre de l'instrument, c'est à dire au spectre du motif intérieur à la période, mais simplement à la fréquence de la note.

Pour nous, la première note, la note de référence, est le *do*. Il s'agit d'une convention et le *do* représente ici une note de fréquence $\omega_0$, avec $\omega_0$ fixé pour toute la suite de cette contribution. Nous introduisons aussi un instrument de musique primitif, la corde vibrante de longueur $L$ tenue à ses deux extrémités. Nous supposons que le *do* correspond au premier mode de vibration de cette corde et $\omega_0$ est la fréquence fondamentale. Si une corde de longueur $L$ vibre à la fréquence $\omega_0$, son second harmonique vibre à la fréquence $2\,\omega_0$ et correspond à une longueur de $\frac{L}{2}$. Le troisième harmonique vibre à la fréquence $3\,\omega_0$ et est associé à une longueur de $\frac{L}{3}$. De façon générale, pour $n$ entier supérieur ou égal à 1, le $n^{\mathrm{o}}$ harmonique est de fréquence $n\,\omega_0$ (voir par exemple le livre de Laurent Schwartz, 1965) et correspond à une longueur de corde égale à $\frac{L}{n}$.

L'oreille humaine est sensible aux rapports de fréquences. Si ce rapport est égal à 2, les deux notes sont à l'octave. L'octave, ou la fréquence $2\,\omega_0$, correspond au second harmonique pour la vibration d'une corde si la fréquence fondamentale est égale à $\omega_0$. Par convention, nous appelons *do*$^*$ la note de fréquence $2\,\omega_0$ :

$$do^* \;:\; 2\,\omega_0\,.$$

Ensuite, il y a tous les autres *do*. Tous ces *do* sont multiples du précédent via une puissance de 2 en termes de fréquence, le *do*$^*$ à l'octave, le suivant à deux octaves $(4\,\omega_0)$ *etc.* ou bien à l'octave plus grave $(\frac{1}{2}\,\omega_0)$, deux octaves $(\frac{1}{4}\,\omega_0)$, *etc.* Nous retenons que la note de référence de l'octave d'ordre $k$ a une fréquence définie par

$$\omega_k = 2^k\,\omega_0\,,\quad k\in\mathbb{Z}\,.$$

On étudie ensuite les autres notes et par convention on se place dans l'intervalle $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$, entre le *do* et le *do*$^*$ : le *do* est la première note de l'intervalle $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$ et le *do*$^*$ la dernière. On introduit la notation $\Omega_0$ utile dans la suite :

$$do \;:\; \Omega_0 = \omega_0\,.$$

Dans le système classique qui remonte au moins à Pythagore et nous sert ici de référence, la note suivante est le *sol*. On génère le *sol* grâce au troisième harmonique, de fréquence $3\,\omega_0$, pour une corde de fréquence fondamentale associée à la note *do*. On ramène ensuite cette nouvelle note dans l'octave de référence $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$ par division de la fréquence par deux, une transformation du boulanger multiplicative (voir par exemple l'ouvrage de Vladimir Arnold et André Avez, 1967). Le *sol* définit la notation $\Omega_1$, de fréquence égale à $\frac{3}{2}\,\omega_0$ :

$$sol \;:\; \Omega_1 = \frac{3}{2}\,\omega_0\,.$$

## 2) Gammes à deux notes

Une « gamme » est l'ensemble des notes disponibles pour écrire un morceau de musique, c'est à dire par convention l'ensemble des fréquences $\nu_j$ utilisables à partir de la fréquence fondamentale $\omega_0$ jusqu'au second harmonique $2\,\omega_0$ :

$$\omega_0 \;\leq\; \nu_j \;<\; 2\,\omega_0\,.$$

Une gamme contient $p$ notes si l'indice entier $j$ prend les valeurs $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$. On ordonne alors les fréquences $\nu_j$ en ordre croissant :

$$\omega_0 = \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_j < \nu_{j+1} < \cdots < \nu_{p-1} < 2\omega_0. \tag{1}$$

Nous proposons dans ce qui suit une structure pour décrire toute une famille de gammes. Nous ne parlons pas davantage d'une gamme à une seule note, formée d'une simple octave :

$$\mathcal{G}_1^0 = \big(do,\, do^*\big)\,.$$

Nous commençons une première famille de gammes avec les trois notes dont nous disposons : le *do*, le *sol* et le *do*$^*$. On fabrique ainsi une gamme « primitive » à deux notes

$$\mathcal{G}_1^1 = \big(do,\, sol,\, do^*\big)\,. \tag{2}$$

L'intervalle $sol\,/do = \frac{3}{2}$ définit une « quinte » pure et le second intervalle (plus petit) $do^*/sol = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3}$ une « quarte » pure Il n'y a aucune raison pour réduire une gamme primitive de deux notes à l'unique choix $\mathcal{G}_1^1$ proposé à la relation (2), une quinte suivie d'une quarte. On peut faire aussi le contraire, c'est à dire une quarte suivie d'une quinte. Ce faisant, on définit à la fois une nouvelle note et une nouvelle gamme. La nouvelle note, le *fa*, de fréquence $\Omega_{-1}$ est issue de $\omega_0$ par une quarte pure, ce qui s'écrit par définition :

$$fa \,:\, \Omega_{-1} = \frac{4}{3}\,\omega_0 \approx 1.333333\;\omega_0\,.$$

La seconde gamme primitive correspond donc à la séquence *do*, *fa*, *do** :

$$\mathcal{G}_2^1 = \big(do,\; fa,\; do^*\big)\,. \tag{3}$$

Nous disposons de deux « structures multiplicatives » pour les gammes primitives : la gamme $\mathcal{G}_1^1$ avec (dans cet ordre), quinte et quarte et la gamme $\mathcal{G}_2^1$ avec une quarte suivie d'une quinte. Mais une gamme, même primitive, doit-elle commencer par la note *do* ? La pratique de la musique montre qu'il n'en est rien. Nous nous livrons donc dans le paragraphe qui suit à la recherche d'une gamme ayant la même structure que la gamme $\mathcal{G}_1^1$ et qui commence par un *sol*. La structure de la gamme $\mathcal{G}_1^1$ est par définition la suite des intervalles multiplicatifs entre les notes de la gamme, ici $(\text{quinte}, \text{quarte}) = \big(\frac{3}{2},\, \frac{4}{3}\big)$. Nous retenons la relation

$$\text{structure multiplicative}\,\big(\mathcal{G}_1^1\big) = \Big(\frac{3}{2}\,,\,\frac{4}{3}\Big)\,. \tag{4}$$

Nous fabriquons la gamme $\mathcal{G}_1^1$ qui commence par un *sol* en posant $\nu_0 = \Omega_1$ au lieu de $\nu_0 = \omega_0$ à la relation (1), ce qui consiste « à changer le *do* en *sol* », ou à changer la fréquence de référence pour la première note de cette gamme. Cette nouvelle gamme « transposée » a la même structure multiplicative que la gamme $\mathcal{G}_1^1$ et commence par un *sol*. Nous la notons $\mathcal{G}_1^1(\Omega_1)$ et elle consiste en la succession suivante de fréquences :

$$\mathcal{G}_1^1(\Omega_1) = \Big(\Omega_1,\; \frac{3}{2}\,\Omega_1,\; 2\,\Omega_1\Big)\,. \tag{5}$$

La note intermédiaire de fréquence $\frac{3}{2}\,\Omega_1$ entre le *sol* et son harmonique $sol^* = 2\,\Omega_1$ est par définition le $ré^*$ de fréquence $\frac{9}{4}\,\omega_0$. Comme $\frac{9}{4}$ n'appartient pas à l'intervalle $[1,\,2]$ mais à l'intervalle $[2,\,4]$, on ramène le $ré^*$ dans l'intervalle $[\omega_0,\,2\omega_0]$ en divisant sa fréquence par deux. On définit ainsi le *ré*, de fréquence $\Omega_2 = \frac{9}{8}\,\omega_0$ :

$$ré \,:\, \Omega_2 = \frac{9}{8}\,\omega_0 = \frac{3^2}{2^3}\,\omega_0 = 1.125\;\omega_0\,. \tag{6}$$

La gamme de même structure que $\mathcal{G}_1^1$ et qui commence par la note *sol*, soit $\mathcal{G}_1^1(\Omega_1)$ s'écrit finalement, compte tenu de (5) et (6) :

$$\mathcal{G}_1^1(\Omega_1) = \big(\Omega_1,\; 2\,\Omega_2,\; 2\,\Omega_1\big)\,. \tag{7}$$

Nous allons voir au paragraphe suivant que ce processus se poursuit.

## 3) Suite infinie des notes

Nous poursuivons l'idée de changer de fréquence de référence, mais à partir du *ré* au lieu du *sol* lors de l'étude précédente. Compte tenu des relations (4) et (7), la gamme

$$\mathcal{G}_1^1(\Omega_2) = \big(\Omega_2,\, \frac{3}{2}\,\Omega_2,\, 2\,\Omega_2\big)$$

définit une nouvelle note de fréquence $\Omega_3 = \frac{3}{2}\,\Omega_2 = \frac{27}{16}\,\omega_0$, qui appartient à l'intervalle $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$ ; c'est le *la*.

$$\textit{la} \,:\, \Omega_3 = \frac{27}{16}\,\omega_0 = \frac{3^3}{2^4}\,\omega_0 = 1.6875\,\omega_0\,.$$

La suite des premières quintes $\{\Omega_0,\, \Omega_1,\, \Omega_2,\, \Omega_3\}$ est déjà d'une grande importance. Par exemple, la famille $\{$*do*, *sol*, *ré*$^*$, *la*$^*\}$ permet d'accorder un violoncelle.

On poursuit maintenant la construction précédente à l'infini. La gamme $\mathcal{G}_1^1(\Omega_k)$ a la même structure multiplicative que $\mathcal{G}_1^1 = \mathcal{G}_1^1(\Omega_0)$ de la relation (4) et commence par la note $\Omega_k$ : elle est *a priori* de la forme $\mathcal{G}_1^1(\Omega_k) = (\Omega_k,\, \frac{3}{2}\,\Omega_k,\, 2\,\Omega_k\,)$. Si $\frac{3}{2}\,\Omega_k \leq 2\,\omega_0$, on pose $\Omega_{k+1} = \frac{3}{2}\,\Omega_k$ et dans le cas contraire où $2\,\omega_0 < \frac{3}{2}\,\Omega_k < 4\,\omega_0$, on définit la note $\Omega_{k+1}$ par la relation $\Omega_{k+1} = \frac{3}{4}\,\Omega_k$. De cette façon, on construit une infinité de notes de fréquence donnée $\Omega_k$ (où $k$ est un entier supérieur ou égal à 1) avec une expression algébrique de la forme $3^k\,\omega_0/2^{\ell(k)}$, laquelle appartient par définition à l'intervalle $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$. Pour créer la note $\Omega_k$, on commence par construire $k$ quintes successives à partir du *do* puis par mise à l'octave, on amène cette note dans l'intervalle de référence :

$$\Omega_k = \frac{3^k}{2^{\ell(k)}}\,\omega_0, \qquad \Omega_k \in [\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]\,. \tag{8}$$

Notons bien que l'entier $\ell(k)$ est défini par la condition (8). On peut encore écrire $1 \leq \frac{3^k}{2^{\ell(k)}} < 2$ ou encore de façon équivalente $\ell(k)\log 2 \leq k\log 3 < \big(\ell(k)+1\big)\log 2$. Donc l'entier $\ell(k)$ est la partie entière de $k\log 3/\log 2$ :

$$\ell(k) \,\leq\, k\,\frac{\log 3}{\log 2} \,<\, \ell(k)+1 \,;\quad \ell(k) = E\left(k\,\frac{\log 3}{\log 2}\right). \tag{9}$$

On introduit maintenant une famille $\xi_k$ de nombres rationnels par les relations

$$\xi_k = \frac{3^k}{2^{\ell(k)}}\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{10}$$

avec $\ell(k)$ introduit à la relation (9). La note numéro $k$ satisfait à la relation

$$\Omega_k = \xi_k\ \omega_0\,,\ k \text{ nombre entier.}$$

Nous pouvons expliciter les premières notes ainsi construites au sein du tableau suivant. Nous notons aussi la valeur en cent, échelle logarithmique proposée par Alexander John Ellis (1885), définie ici par la relation

$$\text{cents}\,(\Omega_k) = \text{nombre entier le plus proche de}\left(\frac{1200}{\log(2)}\,\log\frac{\Omega_k}{\Omega_0}\right)$$

pour fixer les idées.

| numéro de la note | nom de la note | $\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$ | valeur approchée | cents |
|---|---|---|---|---|
| 0 | *do* | 1 | 1 | 0 |
| 1 | *sol* | $3/2$ | 1.5 | 702 |
| 2 | *ré* | $3^2/2^3$ | 1.125 | 204 |
| 3 | *la* | $3^3/2^4$ | 1.6875 | 906 |
| 4 | *mi* | $3^4/2^6$ | 1.265625 | 408 |
| 5 | *si* | $3^5/2^7$ | 1.898437 | 1110 |
| 6 | *fa* $\sharp$ | $3^6/2^9$ | 1.423828 | 612 |
| 7 | *do* $\sharp$ | $3^7/2^{11}$ | 1.067871 | 114 |
| 8 | *sol* $\sharp$ | $3^8/2^{12}$ | 1.601806 | 816 |
| 9 | *ré* $\sharp$ | $3^9/2^{14}$ | 1.201355 | 318 |
| 10 | *la* $\sharp$ | $3^{10}/2^{15}$ | 1.802032 | 1020 |
| 11 | *mi* $\sharp$ | $3^{11}/2^{17}$ | 1.351524 | 522 |
| 12 | *si* $\sharp$ | $3^{12}/2^{19}$ | 1.013643 | 23 |

Les six premières notes sont clairement associées à la gamme de Pythagore (voir Ellis, 1885). On observe que les deux dernières notes sont confondues dans la musique classique occidentale avec le *fa* et le *do* puisque d'une part $(\Omega_{11}/\omega_0 \approx 1.351524$ (522 cents) alors que $\Omega_{-1}/\omega_0 \approx 1.333333$ (498 cents) et d'autre part $\Omega_{12}/\omega_0 \approx 1.013643$ (23 cents) alors que $\Omega_0/\omega_0 = 1$ (0 cent).

La gamme $\mathcal{G}_1^1(\Omega_6)$ par exemple est égale à $(\Omega_6,\, 2\Omega_7,\, 2\Omega_6) = (\mathit{fa}\sharp,\, \mathit{do}\sharp^*,\, \mathit{fa}\sharp^*)$ (avec les notations habituelles). De manière générale, on a

$$\mathcal{G}_1^1(\Omega_k) = \big(\Omega_k,\, \{\Omega_{k+1} \text{ ou } 2\,\Omega_{k+1}\},\, 2\Omega_k\big)\,.$$

Le choix $\Omega_{k+1}$ comme seconde note de la gamme $\mathcal{G}_1^1(\Omega_k)$ a lieu lorsque $\Omega_{k+1} > \Omega_k$ et le choix $2\,\Omega_{k+1}$ correspond au cas de figure $\Omega_{k+1} < \Omega_k$ et dans ce cas $2\,\Omega_{k+1} > 2\,\omega_0 > \Omega_k$.

Il manque encore des notes à notre catalogue. Nous repartons de la gamme primitive de deux notes $\mathcal{G}_2^1 = \mathcal{G}_2^1(\Omega_0) = (\mathit{do},\, \mathit{fa},\, \mathit{do}^*) = (\Omega_0,\, \Omega_{-1},\, 2\,\Omega_0)$ proposée à la relation (3). Au lieu de faire commencer la première note de ce type de gamme par un *do*, on peut la faire commencer par un *fa*. On définit pour cela la structure multiplicative de $\mathcal{G}_2^1$ à savoir une quarte puis une quinte :

$$\text{structure multiplicative}\,\big(\mathcal{G}_2^1\big) = \Big(\frac{4}{3},\, \frac{3}{2}\Big)\,.$$

La note qui suit $\Omega_{-1}$ dans la gamme $\mathcal{G}_2^1(\Omega_{-1})$ est $\Omega_{-2} = \frac{4}{3}\,\Omega_{-1}$ : c'est le *si* bémol ou *si* $\flat$ :

$$\mathit{si}\flat \,:\, \Omega_{-2} = \frac{16}{9}\,\omega_0 = \frac{2^4}{3^2}\,\omega_0 \approx 1.777778\,\omega_0$$

et

$$\mathcal{G}_2^1(\Omega_{-1}) = \big(\mathit{fa},\, \mathit{si}\flat,\, \mathit{fa}^*\big) = \big(\Omega_{-1},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_{-1}\big)\,.$$

La construction de nouvelles notes entraîne celle de nouvelles gammes et réciproquement les nouvelles gammes $\mathcal{G}_2^1(\Omega_{-k})$ permettent d'introduire de nouvelles notes $\Omega_{-(k+1)}$. L'algorithme se poursuit avec les quartes comme avec les quintes. La note $\Omega_{-k}$ ($k$ entier supérieur ou égal à un) est issue de la note fondamentale *do* par une succession de $k$ quartes ensuite ramenées dans l'intervalle $[\omega_0,\, 2\,\omega_0\,[$ à l'aide d'une multiplication par la puissance de 2 qui convient. La note $\Omega_{-k}$ est de la forme $2^{-\ell(-k)}\,\omega_0/3^k$ ce qui revient à généraliser la relation (8) aux entiers $k$ négatifs et la relation (9) s'applique encore.

Les nouvelles notes d'indice négatif sont aussi utiles que celles d'indice positif. Nous présentons les premières dans un tableau.

| numéro de la note | nom de la note | $\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$ | valeur approchée | cents |
|---|---|---|---|---|
| 0 | *do* | 1 | 1 | 0 |
| -1 | *fa* | $4/3$ | 1.333333 | 498 |
| -2 | *si* $\flat$ | $2^4/3^2$ | 1.77778 | 996 |
| -3 | *mi* $\flat$ | $2^5/3^3$ | 1.185185 | 294 |
| -4 | *la* $\flat$ | $2^7/3^4$ | 1.580247 | 792 |
| -5 | *ré* $\flat$ | $2^8/3^5$ | 1.053498 | 90 |
| -6 | *sol* $\flat$ | $2^{10}/3^6$ | 1.404664 | 588 |
| -7 | *do* $\flat$ | $2^{12}/3^7$ | 1.872885 | 1086 |
| -8 | *fa* $\flat$ | $2^{13}/3^8$ | 1.248590 | 384 |

Les deux dernières notes de cette suite, à savoir *do* $\flat$ et *fa* $\flat$ sont éliminées classiquement au profit des notes *si* et *mi*. En effet, on a d'une part $\Omega_{-7}/\omega_0 \approx 1.872885$ (1086 cents) alors que $\Omega_5/\omega_0 \approx 1.898437$ (1110 cents) et d'autre part $\Omega_{-8}/\omega_0 \approx 1.248590$ (384 cents) se confronte à $\Omega_4/\omega_0 \approx 1.265625$ (408 cents).

On remarque que pour $k \in \{-1, \cdots, 5\}$, on a

$$\Omega_k\,\sharp = \Omega_{k+7} \quad \text{et} \quad \Omega_k\,\flat = \Omega_{k-7}\,.$$

Il est donc naturel de poser ici

$$\Omega_k\,\sharp\sharp = \Omega_{k+14} \quad \text{et} \quad \Omega_k\,\flat\flat = \Omega_{k-14} \qquad \text{pour} \ -1 \leq k \leq 5\,.$$

Ces relations fournissent en pratique 14 nouvelles notes de musique, 7 avec des indices positifs :

| numéro de la note | nom de la note | $\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$ | valeur approchée | cents |
|---|---|---|---|---|
| 13 | *fa* $\sharp\sharp$ | $3^{13}/2^{20}$ | 1.520465 | 735 |
| 14 | *do* $\sharp\sharp$ | $3^{14}/2^{22}$ | 1.140349 | 227 |
| 15 | *sol* $\sharp\sharp$ | $3^{15}/2^{23}$ | 1.710523 | 923 |
| 16 | *ré* $\sharp\sharp$ | $3^{16}/2^{25}$ | 1.282892 | 431 |
| 17 | *la* $\sharp\sharp$ | $3^{17}/2^{26}$ | 1.924338 | 1133 |
| 18 | *mi* $\sharp\sharp$ | $3^{18}/2^{28}$ | 1.443254 | 635 |
| 19 | *si* $\sharp\sharp$ | $3^{19}/2^{30}$ | 1.082440 | 137 |

et 7 avec des indices négatifs :

| numéro de la note | nom de la note | $\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$ | valeur approchée | cents |
|---|---|---|---|---|
| -9 | *si* $\flat\flat$ | $2^{15}/3^9$ | 1.664787 | 882 |
| -10 | *mi* $\flat\flat$ | $2^{16}/3^{10}$ | 1.109858 | 180 |
| -11 | *la* $\flat\flat$ | $2^{18}/3^{11}$ | 1.479810 | 678 |
| -12 | *ré* $\flat\flat$ | $2^{20}/3^{12}$ | 1.973081 | 1177 |
| -13 | *sol* $\flat\flat$ | $2^{21}/3^{13}$ | 1.315387 | 475 |
| -14 | *do* $\flat\flat$ | $2^{23}/3^{14}$ | 1.753849 | 973 |
| -15 | *fa* $\flat\flat$ | $2^{24}/3^{15}$ | 1.169233 | 271 |

Nous retenons que de façon générale, pour $k$ nombre entier positif ou négatif, la note $\Omega_k$ est associée à une fréquence proportionnelle à $3^k$, divisée par une puissance de 2 convenable de sorte que le quotient $\frac{\Omega_k}{\Omega_0}$ appartienne à l'intervalle $[1,\, 2[$. Quand on range les notes $\Omega_{-15}$ à $\Omega_{19}$ par fréquences croissantes et non plus par puissances de 3 croissantes, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{lllllllllllll}
\textit{do} & < & \textit{si}\,\sharp & < & \textit{ré}\,\flat & < & \textit{do}\,\sharp & < & \textit{si}\,\sharp\sharp & < & \textit{mi}\,\flat\flat & < & \textit{ré} \\
\textit{ré} & < & \textit{do}\,\sharp\sharp & < & \textit{fa}\,\flat\flat & < & \textit{mi}\,\flat & < & \textit{ré}\,\sharp & < & \textit{fa}\,\flat & < & \textit{mi} \\
\textit{mi} & < & \textit{ré}\,\sharp\sharp & < & \textit{sol}\,\flat\flat & < & \textit{fa} & & & & & & \\
\textit{fa} & < & \textit{mi}\,\sharp & < & \textit{sol}\,\flat & < & \textit{fa}\,\sharp & < & \textit{mi}\,\sharp\sharp & < & \textit{la}\,\flat\flat & < & \textit{sol} \\
\textit{sol} & < & \textit{fa}\,\sharp\sharp & < & \textit{la}\,\flat & < & \textit{sol}\,\sharp & < & \textit{si}\,\flat\flat & < & \textit{la} & & \\
\textit{la} & < & \textit{sol}\,\sharp\sharp & < & \textit{do}\,\flat\flat & < & \textit{si}\,\flat & < & \textit{la}\,\sharp & < & \textit{do}\,\flat & < & \textit{si} \\
\textit{si} & < & \textit{la}\,\sharp\sharp & < & \textit{ré}\,\flat\flat & < & \textit{do}^*. & & & & & &
\end{array} \right.$$

## 4) Brisure de ton et gammes à trois notes

Nous disposons des deux gammes à deux notes $\mathcal{G}_1^1$ et $\mathcal{G}_2^1$. Comme nous avons construit toute la famille de notes $\big(\Omega_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$, nous pouvons après transposition utiliser également les gammes $\mathcal{G}_1^1(\Omega_k)$ et $\mathcal{G}_2^1(\Omega_k)\,(k \in \mathbb{Z})$. Toutefois, on peut avoir envie de construire des gammes avec plus de deux notes. Nous proposons dans la suite le procédé récursif de « brisure de ton » à partir des gammes à deux notes.

Nous définissons le « ton » des gammes à deux notes et nous le notons $\theta_1$ ; il s'agit d'une quinte pure, comme proposé au paragraphe 2. Nous avons

$$\theta_1 = \frac{3}{2}\,.$$

Le « demi-ton » des gammes à deux notes, noté $\delta_1$, est par définition une quarte pure :

$$\delta_1 = \frac{4}{3}\,.$$

Nous cherchons à former une nouvelle gamme issue d'une gamme à deux notes et telle que le rapport de fréquences de deux notes successives $\nu_{j+1}\,/\,\nu_j$ arbitraires vaille soit un ton $\theta_2$ de la nouvelle gamme, soit un demi-ton $\delta_2$ de celle ci :

$$\frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} \in \{\theta_2,\, \delta_2\}\,.$$

Nous généralisons pour les nouvelles gammes ce qui existe pour la gamme à deux notes $\mathcal{G}_1^1$ :

$$\frac{sol}{do},\ \frac{do^*}{sol}\ \in \{\theta_1,\, \delta_1\}\,.$$

Nous brisons multiplicativement le ton $\theta_1$ à l'aide du demi-ton $\delta_1$ et formons ainsi un nouveau ton avec le demi-ton précédent :

$$\theta_2 = \delta_1 = \frac{4}{3}\,.$$

Un nouveau demi-ton $\delta_2$ est obtenu avec le rapport de fréquences lié à la brisure, c'est à dire le rapport de l'ancien ton sur le nouveau ton :

$$\delta_2 = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\theta_1}{\delta_1} = \frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}\,.$$

En procédant de cette manière, le ton primitif (une quinte pure !) est brisé en un nouveau ton (une quarte pure) et un nouveau demi-ton $\delta_2$ qu'on appelle classiquement une « seconde ».

La gamme $\mathcal{G}_1^1$ donne naissance par brisure de son unique ton à deux gammes de seconde génération $\mathcal{G}_1^2$ et $\mathcal{G}_2^2$ selon la façon dont la quinte *sol*/*do* est découpée en « un demi-ton plus un ton ». Dans le premier cas, on a $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \delta_2 = \frac{9}{8}$, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_2 = \frac{4}{3}$, $\frac{\nu_3}{\nu_2} = \theta_2 = \frac{4}{3}$ ; on vient de créer une gamme à trois notes, de seconde génération, qui comporte deux tons $\theta_2$ (une quarte pure) et un demi-ton $\delta_2$ (une seconde) :

$$\mathcal{G}_1^2 = \big(do,\, ré,\, sol,\, do^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_1,\, 2\,\Omega_0\big)\,.$$

La seconde gamme à trois notes $\mathcal{G}_2^2$ est issue de la gamme $\mathcal{G}_1^1$, ce qui signifie que toutes les notes de la gamme $\mathcal{G}_2^2$ sont également des notes de la gamme $\mathcal{G}_1^1$. On débute cette gamme par un ton : $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \theta_2 = \frac{4}{3}$, puis on la continue par un demi-ton : $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_2 = \frac{9}{8}$ pour la terminer par un ton : $\frac{\nu_3}{\nu_2} = \theta_2 = \frac{4}{3}$. Le dernier ton de l'ancienne gamme devient le demi-ton de la nouvelle. La gamme $\mathcal{G}_2^2$ est finalement donnée par la suite

$$\mathcal{G}_2^2 = \big(do,\, fa,\, sol,\, do^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, 2\,\Omega_0\big)\,. \tag{11}$$

La gamme $\mathcal{G}_2^1$ (relation (3)) peut elle-aussi servir de point de départ à deux nouvelles gammes à trois notes : on coupe le ton $\theta_1 = do^*/fa$ en un demi-ton $\delta_2$ suivi d'un ton $\theta_2$ ou bien en un ton $\theta_2$ suivi d'un demi-ton $\delta_2$. Dans le premier cas, on obtient à nouveau la gamme $\mathcal{G}_2^2$ avec un demi-ton, un ton et un ton et dans le second, on a $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \theta_2 = \frac{4}{3}$, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_2 = \frac{4}{3}$, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_2 = \frac{9}{8}$. La note *si* bémol est utile pour fabriquer $\mathcal{G}_3^2$ :

$$\mathcal{G}_3^2 = \big(do,\, fa,\, si\flat,\, do^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \tag{12}$$

Nous retenons la structure multiplicative des trois gammes $\mathcal{G}_i^2$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{structure multiplicative}\big(\mathcal{G}_1^2\big) = \big(\delta_2,\, \theta_2,\, \theta_2\big) = \big(\frac{9}{8},\, \frac{4}{3},\, \frac{4}{3}\big) \\ \text{structure multiplicative}\big(\mathcal{G}_2^2\big) = \big(\theta_2,\, \delta_2,\, \theta_2\big) = \big(\frac{4}{3},\, \frac{9}{8},\, \frac{4}{3}\big) \\ \text{structure multiplicative}\big(\mathcal{G}_3^2\big) = \big(\theta_2,\, \theta_2,\, \delta_2\big) = \big(\frac{4}{3},\, \frac{4}{3},\, \frac{9}{8}\big)\,. \end{array}\right. \tag{13}$$

Les gammes à trois notes permettent-elles de composer de la musique, même très primitive ? Avec une gamme à trois notes, il est naturel de penser à sa mise en musique avec une lyre à quatre cordes. Mais selon Jean-René Jannot (1979), il n'existe pas de gamme tétracorde et on peut supposer qu'une lyre à quatre cordes était un instrument d'accompagnement pour une musique avec plus de notes. Par contre, le procédé de division d'une quinte par une quarte proposé dans ce paragraphe semble directement relié à l'accord des instruments hourrites dans la Mésopotamie du second millénaire avant J.-C., comme le propose Marcelle Duchesne-Guillemin (1980). En effet, à partir d'une quinte ascendandante et d'une quarte descendante, on construit simplement une seconde par brisure de ces deux intervalles. Ainsi, la brisure de ton a donc probablement une origine pratique très ancienne. Nous poursuivons ce travail de brisure des tons par les demi-tons avec la troisième famille de gammes, les gammes pentatoniques.

## 5) Gammes à cinq notes

Le procédé de brisure de ton permet de construire de nouvelles gammes : nous découpons le ton $\theta_2 = \frac{4}{3}$ en un nouveau ton $\theta_3$ et un demi-ton $\delta_3$ de sorte que

$$\theta_3 \, \delta_3 = \theta_2 \, .$$

Si on procède *a priori* comme pour les gammes à trois notes, on obtient $\theta_3 = \delta_2 = \frac{9}{8}$ et on obtient ainsi un nouveau demi-ton $\delta_3 = \theta_2/\theta_3 = \frac{4/3}{9/8} = \frac{32}{27} = \frac{2^5}{3^3}$. Mais les valeurs numériques sont cruelles : on trouve $\theta_3 = \frac{9}{8} = 1.125$ et un demi-ton $\delta_3 = \frac{32}{27} \approx 1.1852$ supérieur strictement au ton $\theta_3$. Nous venons de former un ton qui est plus petit que le demi-ton qui lui est associé. On décide donc d'échanger les rôles du ton et du demi-ton, d'accepter un algorithme de construction "non linéaire" pour que le ton $\theta_3$ de la nouvelle famille soit plus grand que le demi-ton $\delta_3$ associé :

$$\delta_3 = \delta_2 = \frac{3^2}{2^3} \quad \text{et} \quad \theta_3 = \frac{\theta_2}{\delta_3} = \frac{\theta_2}{\delta_2} = \frac{2^5}{3^3} \, .$$

On poursuit ensuite le procédé de brisure des deux tons des gammes $\mathcal{G}_i^2$ $(i = 1, 2, 3)$ pour former la troisième famille de gammes $\mathcal{G}_j^3$, à cinq notes.

Les gammes à cinq notes ont toutes deux tons et trois demi-tons :

$$T_3 = 2, \qquad D_3 = 3$$

alors que les gammes à deux notes ont toutes un ton et un demi-ton :

$$T_1 = 1, \qquad D_1 = 1$$

et les gammes à trois notes ont deux tons et un demi-ton :

$$T_2 = 2, \qquad D_2 = 1 \, .$$

Il y a quatre façons de briser les deux tons de la gamme $\mathcal{G}_1^2$ : le premier demi ton $ré/do = \frac{\nu_1}{\nu_0}$ est toujours un demi-ton $\delta_3 = \delta_2$. Si on décide que $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_3$, on introduit la note *mi*. De même, si on casse le second ton $\theta_2$ en commençant par un demi-ton $\delta_3$, on utilise le *la* de fréquence $\Omega_3$. La gamme $\mathcal{G}_1^3$ à cinq notes ainsi obtenue s'écrit :

$$\mathcal{G}_1^3 = \big(do,\, ré,\, mi,\, sol,\, la,\, do^*\big) \;=\; \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0\big)\, .$$

On l'appelle souvent gamme pentatonique majeure car on peut l'étendre en une gamme de mode majeur avec sept notes, comme nous verrons plus loin. Si on brise le premier ton *sol*/*ré* $= \theta_2$ de la gamme $\mathcal{G}_1^2$ en commençant par un ton $\theta_3$, on retrouve la relation $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_3 = \frac{32}{27}$, soit $\frac{\nu_2}{\omega_0} = \frac{9}{9}\,\frac{32}{27} = \frac{4}{3} = \frac{\Omega_{-1}}{\omega_0}$, ce qui introduit à nouveau le *fa*. De même, si on brise le second ton *do*$^*$/*sol* de la gamme $\mathcal{G}_1^2$ en commençant par un ton nouveau, on a $\frac{\nu_4}{\nu_3} = \theta_3$ donc $\frac{\nu_4}{\omega_0} = \frac{3}{2}\,\frac{32}{27} = \frac{8}{9} = \frac{\Omega_{-2}}{\omega_0}$ et on reconnaît le *si*$\flat$. Les trois autres gammes à cinq notes issues de $\mathcal{G}_1^2$ s'en déduisent aisément :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{G}_2^3 = \big(\textit{do, ré, fa, sol, la, do}^*\big) \;=\; \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0\big) \\ \mathcal{G}_3^3 = \big(\textit{do, ré, fa, sol, si}\flat\textit{, do}^*\big) \;=\; \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big) \\ \mathcal{G}_4^3 = \big(\textit{do, ré, mi, sol, si}\flat\textit{, do}^*\big) \;=\; \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_1,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array}\right.$$

Combien y a-t-il de gammes à cinq notes ? Autant que de façons de placer arbitrairement les deux ($= T_3$) tons $\theta_3$ et les trois ($= D_3$) demi-tons $\delta_3$ parmi cinq objets, puisque

$$\theta_3^{T_3}\;\delta_3^{D_3} = \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^2 \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2 = 2\,.$$

On compte par conséquent un total de $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ gammes à cinq notes qui débutent par la note *do*.

Examinons les gammes nouvelles issues de la brisure du ton de la gamme $\mathcal{G}_2^2$ (relation (11)) où les deux tons $\theta_2$ sont aux extrémités. Si on commence par un demi-ton $\delta_3$, on a $\frac{\nu_1}{\omega_0} = \delta_3 = \frac{9}{8} = \frac{\Omega_2}{\omega_0}$ et on retrouve le *ré* comme première note alors que si on commence par un ton $\theta_3$, on obtient $\frac{\nu_1}{\omega_0} = \theta_3 = \frac{2^5}{3^3} = \frac{\Omega_{-3}}{\omega_0}$ et le *mi*$\flat$ doit être utilisé ici. De même si on brise le second ton *do*$^*$/*sol* de la gamme $\mathcal{G}_2^2$ en commençant par un demi-ton $\delta_3$, on retrouve le *la*, alors que si on commence par un ton $\theta_3$, on doit utiliser le *si*$\flat$ : c'est analogue à la brisure du second ton de la gamme $\mathcal{G}_1^2$ et nous l'avons déjà vu plus haut. On dispose maintenant de deux nouvelles gammes à cinq notes :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{G}_5^3 = \big(\textit{do, mi}\flat\textit{, fa, sol, la, do}^*\big) \;=\; \big(\Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0\big) \\ \mathcal{G}_6^3 = \big(\textit{do, mi}\flat\textit{, fa, sol, si}\flat\textit{, do}^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array}\right.$$

La gamme $\mathcal{G}_6^3$ s'appelle aussi gamme pentatonique mineure.

Nous continuons avec les gammes à cinq notes issues de la gamme $\mathcal{G}_3^2$ (relation (12)) qui a ses deux tons $\theta_2$ au début. Pour briser le premier ton, le processus est analogue à la gamme $\mathcal{G}_2^2$ et pour briser le second ton *si*$\flat$/*fa*, on peut commencer par un demi-ton $\delta_3$ et on obtient un *sol* et par conséquent une gamme déjà construite ($\mathcal{G}_3^3$ ou $\mathcal{G}_6^3$) ou bien on commence par un ton $\theta_3$ et on a alors $\frac{\nu_4}{\nu_3} = \theta_3 = \frac{32}{27}$, donc $\frac{\nu_4}{\omega_0} = \frac{4}{3}\,\frac{32}{27} = \frac{64}{81} = \frac{2^7}{3^4} = \frac{\Omega_{-4}}{\omega_0}$ ; on on ne coupera pas au *la*$\flat$ cette fois. On a en définitive :

$$\left\{\begin{array}{l} \mathcal{G}_7^3 = \big(\textit{do, ré, fa, la}\flat\textit{, si}\flat\textit{, do}^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big) \\ \mathcal{G}_8^3 = \big(\textit{do, mi}\flat\textit{, fa, la}\flat\textit{, si}\flat\textit{, do}^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array}\right.$$

Le décompte des gammes comportant cinq notes n'est pas complet. Les huit gammes déjà vues sont issues des trois gammes à trois notes. Nous détaillons dans le tableau qui suit la succession des deux tons et des trois demi-tons, c'est à dire la structure multiplicative de ces huit gammes.

| nom de la gamme | alternance des tons et des demi-tons | valeurs numériques |
|---|---|---|
| $\mathcal{G}_1^3$ | $\delta_3,\, \delta_3,\, \theta_3,\, \delta_3,\, \theta_3$ | $\frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27}$ |
| $\mathcal{G}_2^3$ | $\delta_3,\, \theta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \theta_3$ | $\frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27}$ |
| $\mathcal{G}_3^3$ | $\delta_3,\, \theta_3,\, \delta_3,\, \theta_3,\, \delta_3$ | $\frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8}$ |
| $\mathcal{G}_4^3$ | $\delta_3,\, \delta_3,\, \theta_3,\, \theta_3,\, \delta_3$ | $\frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8}$ |
| $\mathcal{G}_5^3$ | $\theta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \theta_3$ | $\frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27}$ |
| $\mathcal{G}_6^3$ | $\theta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \theta_3,\, \delta_3$ | $\frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8}$ |
| $\mathcal{G}_7^3$ | $\delta_3,\, \theta_3,\, \theta_3,\, \delta_3,\, \delta_3$ | $\frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8}$ |
| $\mathcal{G}_8^3$ | $\theta_3,\, \delta_3,\, \theta_3,\, \delta_3,\, \delta_3$ | $\frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8}$ |

Il manque clairement deux gammes qui ne sont pas issues de gammes à trois notes, mais qu'on peut construire simplement en complétant les structures multiplicatives précédentes. On trouve ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_9^3 \,:\, \big(\delta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \theta_3,\, \theta_3\big) = \Big(\frac{32}{27},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8}\Big) \\ \mathcal{G}_{10}^3 \,:\, \big(\theta_3,\, \theta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \delta_3\big) = \Big(\frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{32}{27}\Big) \,. \end{array} \right. \qquad (14)$$

Les successions de notes des deux gammes de structures décrites à la relation (14) qui commencent par un *do* sont faciles à déterminer. Nous y rencontrons le *sol* bémol ($\Omega_{-6}$) et le *fa* dièse (ou $\Omega_6$) à nouveau :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_9^3 = \big(\textit{do},\, \textit{mi}\flat,\, \textit{sol}\flat,\, \textit{la}\flat,\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big) \\ \mathcal{G}_{10}^3 = \big(\textit{do},\, \textit{ré},\, \textit{mi},\, \textit{fa}\sharp,\, \textit{la},\, \textit{do}^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_6,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0\big) \,. \end{array} \right.$$

Les gammes pentatoniques sont bien répertoriées depuis de nombreuses années. Ainsi, Hermann von Helmholtz présente dans son traité (1868) les cinq gammes suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1 = \big(\textit{do},\, \textit{ré},\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^*\big) \\ \mathcal{H}_2 = \big(\textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^*,\, \textit{fa}^*\big) \\ \mathcal{H}_3 = \big(\textit{sol},\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^*\big) \\ \mathcal{H}_4 = \big(\textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^*,\, \textit{si}\flat^*\big) \\ \mathcal{H}_5 = \big(\textit{ré},\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{si}\flat^*,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^*\big) \,. \end{array} \right.$$

Nous pouvons les relier par transposition aux gammes présentées plus haut et on a

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{G}_3^3,\; \mathcal{H}_2 = \mathcal{G}_2^3(\textit{fa}),\; \mathcal{H}_3 = \mathcal{G}_6^3(\textit{sol}),\; \mathcal{H}_4 = \mathcal{G}_1^3(\textit{si}\flat),\; \mathcal{H}_5 = \mathcal{G}_8^3(\textit{ré}).$$

Nous verrons plus loin dans cette contribution que ces cinq gammes sont toutes du même « type ». Dans son article sur le pentatonisme, François Picard (2001) présente cinq structures associées à la musique chinoise. Nous reprenons l'essentiel de son tableau et notons en regard la gamme correspondante avec notre classification.

| nom chinois | gamme présentée par F. Picard | gamme associée |
|---|---|---|
| gong diaoshi | *do, ré, mi, sol, la, do** | $\mathcal{G}_1^3$ |
| shang diaoshi | *ré, mi, sol, la, do*, ré** | $\mathcal{G}_3^3(\textit{ré})$ |
| jue diaoshi | *mi, sol, la, do*, ré*, mi** | $\mathcal{G}_8^3(\textit{mi})$ |
| zhi diaoshi | *sol, la, do*, ré*, mi*, sol** | $\mathcal{G}_2^3(\textit{sol})$ |
| yu diaoshi | *la, do*, ré*, mi*, sol*, la** | $\mathcal{G}_6^3(\textit{la})$ |

Nous constatons que ces cinq gammes sont des transpositions des cinq gammes proposées par Helmholtz. Les diverses games pentatoniques sont présentes dans de nombreuses musiques (voir François Picard, 2001), y compris dans la musique de Blues, avec de nombreuses variations. Nous formalisons au paragraphe suivant l'existence d'une suite infinie de familles de gammes.

## 6) Construction récurrente

Nous détaillons le processus pour passer des gammes de génération $k$ (avec une notation générique $\mathcal{G}_\star^k$ ) aux gammes de la génération suivante d'indice $k+1$. Une gamme $\mathcal{G}_\star^k$ contient $T_k$ tons et $D_k$ demi-tons, de valeurs respectives $\theta_k$ et $\delta_k$. L'ensemble des notes construites se situent au sein de l'octave de base $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$, et on en déduit :

(15) $$\theta_k^{T_k}\ \delta_k^{D_k} = 2\,.$$

On appelle $p_k$ le nombre de notes d'une gamme de la $k^{\text{ième}}$ famille et l'on a :

(16) $$p_k = T_k\ +\ D_k\,.$$

La construction consiste toujours à briser le ton $\theta_k$ en un nouveau ton $\theta_{k+1}$ « plus » un nouveau demi-ton $\delta_{k+1}$ avec l'un des deux morceaux égal au demi-ton $\delta_k$ :

(17) $$\theta_{k+1}\ \delta_{k+1} = \theta_k\,.$$

Si on se donne les deux relations suivantes $\theta_{k+1} = \delta_k$ et $\delta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$, les plus simples d'un point de vue algébrique, alors on peut aussi écrire $\delta_k = \theta_{k+1}$ et $\theta_k = \theta_{k+1}\ \delta_{k+1}$. Dans ces conditions, la relation (15) qui entraîne $p_k = T_k + D_k$ s'écrit maintenant $(\theta_{k+1})^{T_k+D_k}\ (\delta_{k+1})^{T_k} = 2$. On en déduit $T_{k+1} = T_k + D_k$, $D_{k+1} = T_k$ et $p_{k+1} = 2\,T_k + D_k$. À l'ordre suivant, on a donc $T_{k+2} = T_{k+1} + D_{k+1} = 2\,T_k + D_k$ et $D_{k+2} = T_{k+1} = T_k + D_k$. Donc $p_{k+2} = T_{k+2} + D_{k+2} = 3\,T_k + 2\,D_k$ est exactement égal à $p_k + p_{k+1}$. Comme $p_0 = 1$, $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$, la suite $p_k$ coïncide avec la suite de Fibonacci (voir par exemple Michel Demazure, 1997) et on a $p_4 = 8$ avec cette hypothèse. Nous proposons un exemple de ce cas de figure, une gamme avec huit notes, à l'Annexe A.

Il faut bien prendre garde au fait que le ton doit toujours rester supérieur au demi-ton. On choisit donc de garder comme nouveau ton le demi-ton $\delta_k$ si $\frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k$ ou bien on pose $\theta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$ dans le cas contraire,

(18) $$\theta_{k+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \delta_k & \text{si}\quad \frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k \\ \frac{\theta_k}{\delta_k} & \text{si}\quad \frac{\theta_k}{\delta_k} > \delta_k\,. \end{array} \right.$$

Le demi-ton complémentaire $\delta_{k+1}$ est issu simplement des relations (17) et (18) :

(19) $$\delta_{k+1} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\theta_k}{\delta_k} & \text{si}\quad \frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k \\ \delta_k & \text{si}\quad \frac{\theta_k}{\delta_k} > \delta_k\,. \end{array} \right.$$

L'algorithme de brisure de ton est donc non linéaire. En particulier, le nombre $T_{k+1}$ de nouveaux tons dépend du cas de figure. On a $T_{k+1} = T_k + D_k$ si les anciens demi-tons $\delta_k$

deviennent des nouveaux tons $\theta_{k+1}$ ou alors $T_{k+1} = T_k$ dans le cas contraire où l'on conserve les demi-tons. De manière analogue, le nombre $D_{k+1}$ de nouveaux demi-tons vaut $D_{k+1} = T_k$ dans le premier cas et $D_{k+1} = T_k + D_k$ dans le second :

$$T_{k+1} = \begin{cases} T_k + D_k & \text{si} \quad \theta_k < {\delta_k}^2 \\ T_k & \text{si} \quad \theta_k > {\delta_k}^2 \end{cases} \tag{20}$$

$$D_{k+1} = \begin{cases} T_k & \text{si} \quad \theta_k < {\delta_k}^2 \\ T_k \, + \, D_k & \text{si} \quad \theta_k > {\delta_k}^2 \, . \end{cases} \tag{21}$$

La relation (15) s'étend clairement à l'ordre $k+1$ ainsi que la relation (16) qui prend aussi la forme :

$$p_{k+1} = p_k \, + \, T_k \, . \tag{22}$$

On peut alors recommencer à l'ordre suivant et poursuivre la mise en œuvre de l'algorithme.

Le nombre $N_k$ de gammes $\mathcal{G}_\star^k$ avec $p_k$ notes et $T_k$ tons est simplement égal au nombre de façons d'agencer $T_k$ tons et $D_k$ demi-tons, soit le nombre $N_k$ de combinaisons :

$$N_k = \binom{p_k}{T_k} = \binom{p_k}{D_k} = \frac{p_k!}{T_k! \, D_k!} \, . \tag{23}$$

On peut évoquer une « gamme-octave » qui ne comporterait qu'une seule note :

$$p_0 = 1, \quad T_0 = 1, \quad D_0 = 0, \quad \theta_0 = 2, \quad \delta_0 = 1, \quad N_0 = 1 \, .$$

Mais il est alors impossible de briser cette octave initiale par un demi-on évanescent ; la relation de récurrence débute avec les gammes comportant deux notes et met en exergue la quinte :

$$p_1 = 2, \quad T_1 = 1, \quad D_1 = 1, \quad \theta_1 = \frac{3}{2} = 1.5, \quad \delta_1 = \frac{4}{3} \approx 1.333333, \quad N_1 = 2 \, . \tag{24}$$

On poursuit avec les gammes à trois notes

$$p_2 = 3, \quad T_2 = 2, \quad D_2 = 1, \quad \theta_2 = \frac{4}{3} \approx 1.333333, \quad \delta_2 = \frac{9}{8} = 1.125, \quad N_2 = 3$$

et nous venons de mettre en évidence au paragraphe précédent toutes les gammes de troisième génération à cinq notes :

$$p_3 = 5, \quad T_3 = 2, \quad D_3 = 3, \quad \theta_3 = \frac{2^5}{3^3} \approx 1.185185, \quad \delta_3 = \frac{9}{8} = 1.125, \quad N_3 = 10 \, .$$

Les gammes de quatrième génération comportent sept notes :

$$p_4 = 7, \quad T_4 = 5, \quad D_4 = 2, \quad \theta_4 = \frac{3^2}{2^3} = 1.125, \quad \delta_4 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad N_4 = 21$$

et contiennent toutes les gammes de la musique classique occidentale, plus quelques autres moins utilisées. Nous y reviendrons. Nous retenons que la construction récurrente des gammes avec une brisure de ton, définie au début de ce paragraphe par les relations (15) à (23), permet de faire émerger à la quatrième étape une gamme de sept notes. Voilà selon nous pourquoi la gamme a sept notes !

Nous poursuivons avec les gammes comprenant un nombre de notes plus important :

$$p_5 = 12, \quad T_5 = 5, \quad D_5 = 7, \quad \theta_5 = \frac{3^7}{2^{11}} \approx 1.067871, \quad \delta_5 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad N_5 = 792.$$

Le faible écart entre le ton $\theta_5 \approx 1.0678711$ et le demi-ton $\delta_5 \approx 1.053498$ puisque $\frac{\theta_5}{\delta_5} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$ soit 23 cents, pose la question de sa perception et motive la gamme tempérée proposée d'abord par Simon Stevin (1548-1620) puis perfectionnée par Andreas Werckmeister (1645-1706) avant de se propager à l'ensemble de la musique occidentale. On les confond tous les deux au bénéfice de l'irrationnel racine douzième de 2.

Nous terminons ce paragraphe en montrant quelques gammes avec de plus en plus de notes et poursuivons l'algorithme (de Pythagore ?). Nous omettons d'expliciter ces diverses gammes, compte tenu de leur nombre important, sans outil plus élaboré de classification. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_6 = 17, \quad T_6 = 12, \quad D_6 = 5, \quad \theta_6 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad \delta_6 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643 \\ p_7 = 29, \quad T_7 = 12, \quad D_7 = 17, \quad \theta_7 = \frac{2^{27}}{3^{17}} \approx 1.039318, \quad \delta_7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643 \\ p_8 = 41, \quad T_8 = 12, \quad D_8 = 29, \quad \theta_8 = \frac{2^{46}}{3^{29}} \approx 1.025329, \quad \delta_8 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643\,. \end{array} \right.$$

On retrouve là une famille de gammes de Pythagore à 41 degrés, dite de Paul von Jankó (1901). La famille suivante comporte 53 notes et est connue avec le nom de Nikolaus Mercator (1620-1687) (voir le musicologue William Holder, 1694) :

$$p_9 = 53, \quad T_9 = 41, \quad D_9 = 12, \quad \theta_9 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643, \quad \delta_9 = \frac{2^{65}}{3^{41}} \approx 1.011529\,.$$

Pour ces gammes, le ton et le demi-ton diffèrent à nouveau très peu puisque $\frac{\theta_9}{\delta_9} = \frac{3^{53}}{2^{84}} \approx 1.002090$, soit 4 cents. On a ainsi $|\frac{\theta_9}{\delta_9} - 1| \approx 0.002 \ll |\theta_9 - 1| \approx 0.014$ et $|\frac{\theta_9}{\delta_9} - 1| \ll |\delta_9 - 1| \approx 0.011$. Il est alors concevable de confondre les tons et les demi-tons pour former une seule gamme de cinquante trois degrés. Enfin, la dixième famille de gammes a les caractéristiques suivantes

$$p_{10} = 94, \quad T_{10} = 53, \quad D_{10} = 41, \quad \theta_{10} = \frac{2^{65}}{3^{41}} \approx 1.011529, \quad \delta_{10} = \frac{3^{53}}{2^{84}} \approx 1.002090\,.$$

Si on étudie le comportement des diverses familles de gammes pour $k$ tendant vers l'infini, on trouve un système dynamique discret qui a des ruptures lorsque la différence entre le nombre irrationnel $k\,\frac{\log 3}{\log 2}$ et sa partie entière saute d'une valeur proche de 1 à une valeur proche de 0. Dans un de ses articles, Franck Jedrzejewski (2007) évoque l'étude des gammes pythagoriciennes et introduit une famille de gammes comportant successivement 3, 5, 7, 12, 17, 29, 41, 53 et 94 notes. Il observe que cette suite de nombres a une parenté avec les valeurs des fractions réduites du développement en fractions continues (voir Michel Demazure, 1997) du nombre $\log_2(3/2)$. Pourtant, il n'y a pas identité entre la suite $p_k$ du nombre de notes des diverses familles et les réduites de $\log_2(3/2)$. On a en effet

$$\log_2\left(\frac{3}{2}\right) \simeq 1\,,\ \frac{1}{2}\,,\ \frac{3}{5}\,,\ \frac{7}{12}\,,\ \frac{24}{41}\,,\ \frac{31}{53}\,,\ \frac{179}{306}\,,\ \textit{etc.}$$

Comprendre les propriété fines de l'algèbre des gammes de Pythagore reste donc pour nous un champ de recherche potentiel. Au paragraphe suivant, nous mettons en évidence quelques propriétés abstraites.

## 7) Quelques propriétés mathématiques

L'algorithme décrit au paragraphe précédent (relations (16) à (23)) joint à la « condition initiale » (24) des gammes à deux notes satisfait plusieurs propriétés mathématiques. Nous les énonçons et démontrons dans ce paragraphe.

**Proposition 1. Équilibre harmonique**
Le nombre de tons $T_k$ et le nombre de demi-tons $D_k$ sont, pour $k$ entier supérieur ou égal à 1, premiers entre eux :

$$\big(T_k,\, D_k\big) = 1\,. \tag{25}$$

On a une propriété analogue pour le nombre de tons $T_k$ et le nombre $p_k = T_k + D_k$ de notes d'une gamme d'ordre $k$ :

$$\big(T_k,\, p_k\big) = 1\,. \tag{26}$$

La preuve de la Proposition 1 et en particulier celle de la relation (25) s'effectue par récurrence sur l'entier $k$, en utilisant l'identité de Bézout (voir par exemple Demazure, 1997) : les entiers $x$ et $y$ sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers $u$ et $v$ de sorte que $u\,x + v\,y = 1$. On a dans un premier temps $T_1 = 1$ et $D_1 = 1$, donc ces deux unités sont clairement premières entre elles. Si la relation (25) est vraie jusqu'à l'ordre $k$, on a

$$u_k\, T_k + v_k\, D_k = 1 \tag{27}$$

pour deux entiers $u_k$ et $v_k$. Mais alors, $T_k$ et $T_k + D_k$ sont encore premiers entre eux, puisque la relation (27) s'écrit aussi :

$$(u_k - v_k)\, T_k + v_k\, (T_k + D_k) = 1\,. \tag{28}$$

Par suite, compte tenu des relations (20) et (22), les nombres de nouveaux tons $T_{k+1}$ et de nouveaux demi-tons $D_{k+1}$ sont toujours premiers entre eux. De plus, compte tenu de la relation (16) et de l'identité de Bézout, la relation (28) exprime exactement la relation (26) et la proposition est établie à l'ordre suivant. □

**Proposition 2. Factorisation de la structure multiplicative**
Pour $k$ entier supérieur à 1 arbitraire, le nombre $N_k$ de gammes à $p_k$ notes (voir les relations (16) et (23)) est divisible par $p_k$ :

$$\exists\ \tau_k \in \mathbb{N}\,,\ N_k = p_k\, \tau_k\,.$$

Pour démontrer la Proposition 2, rappelons d'abord que la relation (23) s'écrit $N_k = \begin{pmatrix} p_k \\ T_k \end{pmatrix}$. Donc elle entraîne $T_k\, N_k = p_k \begin{pmatrix} p_k - 1 \\ T_k - 1 \end{pmatrix}$ et l'entier $p_k$ divise le produit $T_k\, N_k$. Comme $p_k$ et $T_k$ sont premiers entre eux d'après la proposition précédente, $p_k$ divise $N_k$ compte tenu du lemme de Gauss. La proposition en résulte. □

On rappelle que la famille de rationnels $\xi_k$ déjà utilisée pour définir la famille des notes $\Omega_k$ est définie à la relation (10). Compte tenu de la relation (8), on a

$$\Omega_k = \xi_k\ \omega_0\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

On remarque qu'on dispose également de la relation

$$\xi_k \, \xi_\ell = \xi_{k+\ell} \text{ ou } \frac{1}{2}\, \xi_{k+\ell}$$

selon que $\xi_{k+\ell}$ est supérieur ou inférieur à 2. On a ensuite la propriété suivante :

**Proposition 3. Notes d'une gamme et décalage d'indices**
Soit $\mathcal{G}^k$ l'ensemble des gammes $\mathcal{G}_j^k \, (1 \leq j \leq N_k)$ définies aux relations (16) à (23) du paragraphe 6. Alors il existe $\varepsilon_k \in \{-1, +1\}$ tel que

(29) $$\theta_k = \xi_{\varepsilon_k \, D_k} \,, \quad \delta_k = \xi_{-\varepsilon_k \, T_k} \,.$$

Le ton $\theta_k$ correspond pour la famille $\Omega$ de toutes les notes à un décalage de paramètre égal (au signe près) au nombre de demi-tons et le demi-ton $\delta_k$ à un décalage égal (au signe près) au nombre de tons. On peut ré-écrire de cette façon quelques gammes vues lors des paragraphes précédents :

(30) $$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{G}_1^1 & = & \big( \Omega_0, \, \Omega_{0+1}, \, 2\,\Omega_{0+1-1} \big) \\ \mathcal{G}_3^2 & = & \big( \Omega_0, \, \Omega_{0-1}, \, \Omega_{0-1-1}, \, 2\,\Omega_{0-1-1+2} \big) \\ \mathcal{G}_{10}^3 & = & \big( \Omega_0, \, \Omega_{0+2}, \, \Omega_{0+2+2}, \, \Omega_{0+2+2+2}, \, \Omega_{0+2+2+2-3}, \, 2\,\Omega_{0+2+2+2-3-3} \big) \,. \end{array} \right.$$

On dispose ainsi d'un tableau de correspondances entre les valeurs du ton et du demi-ton des différentes gammes et les numéros des notes.

(31)

| famille de gammes numéro $k$ | nombre de notes $p_k$ | ton $\theta_k$ | demi-ton $\delta_k$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $\xi_1$ | $\xi_{-1}$ |
| 2 | 3 | $\xi_{-1}$ | $\xi_2$ |
| 3 | 5 | $\xi_2$ | $\xi_{-3}$ |
| 4 | 7 | $\xi_2$ | $\xi_{-5}$ |
| 5 | 12 | $\xi_7$ | $\xi_{-5}$ |
| 6 | 17 | $\xi_5$ | $\xi_{12}$ |
| 7 | 29 | $\xi_{-17}$ | $\xi_{12}$ |
| 8 | 41 | $\xi_{-29}$ | $\xi_{12}$ |
| 9 | 53 | $\xi_{12}$ | $\xi_{-41}$ |
| 10 | 94 | $\xi_{-41}$ | $\xi_{53}$ |

La Proposition 3 s'établit par récurrence sur $k$. Comme la preuve est assez technique, nous l'avons renvoyée en Annexe B.

## 8) Structure multiplicative et tonalité

On utilise dans ce paragraphe une gamme $\gamma$ de la famille étudiée ici, à $p$ notes et qui commence par un *do*. C'est une suite $\big(\nu_j\big)_{0 \leq j \leq p}$ qui satisfait à la relation (1) :

$$\omega_0 = \nu_0, \, \nu_1, \, \cdots \,, \, \nu_j < \nu_{j+1}, \, \cdots \,, \, \nu_{p-1}, \, \nu_p = 2\,\omega_0$$

De plus, le rapport $\nu_{j+1}/\nu_j$ de deux notes successives est soit un ton $\theta$ soit un demi-ton $\delta$ :

$$\frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} \in \{\,\theta,\,\delta\,\}, \qquad 0 \leq j \leq p-1\,.$$

Par définition, la « structure multiplicative » $\mathcal{S}(\gamma)$ de la gamme $\gamma$ est la suite des rapports de fréquences entre deux notes successives, c'est à dire :

$$\mathcal{S}(\gamma) = \Big(\frac{\nu_1}{\nu_0}, \frac{\nu_2}{\nu_1}, \cdots, \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}, \cdots, \frac{\nu_p}{\nu_{p-1}}\Big) \;\in\; \{\,\theta,\,\delta\,\}^p\,.$$

La structure multiplicative $\mathcal{S}(\gamma)$ permet de savoir quel est l'agencement précis des tons et des demi-tons de la gamme $\gamma$. Si $T$ est le nombre de tons et $D$ le nombre de demi-tons de cette gamme, on a vu que

$$p = T + D\,.$$

De plus (Proposition 3), il existe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ tel que

$$\theta = \xi_{\varepsilon D}, \qquad \delta = \xi_{-\varepsilon T}$$

ce qui permet de construire les notes $\nu_j$ de la gamme $\gamma$ par décalage successif des indices des notes « de base » $\Omega_k$, comme illustré aux exemples (30). Il est donc naturel de ne pas forcément commencer une gamme de structure $\mathcal{S}(\gamma)$ par le *do* (ou $\Omega_0$) mais par une note $\Omega_k$ arbitraire telle qu'introduite au paragraphe 3.

On se donne une structure multiplicative $\mathcal{S}$. La gamme $\mathcal{G}(\mathcal{S})(\Omega_k)$ de structure multiplicative $\mathcal{S}$ et de « tonalité » $\Omega_k$ est par définition la gamme obtenue à partir de la relation (1) en gardant la même structure $\mathcal{S} = \big(\mu_1 = \frac{\nu_1}{\nu_0}, \mu_2 = \frac{\nu_2}{\nu_1}, \cdots, \mu_j = \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j}, \cdots, \mu_p = \frac{\nu_p}{\nu_{p-1}}\big)$ que la gamme $\gamma$ mais en changeant la première note générique $\omega_0$ pour la note particulière $\Omega_k$. On a donc en général

$$\mathcal{G}(\mathcal{S})(\Omega_k) = \big(\,\Omega_k,\, \mu_1\,\Omega_k,\, \mu_2\,\mu_1\,\Omega_k,\, \cdots,\, (\mu_j\mu_{j-1}\cdots\mu_1)\,\Omega_k,\, \cdots,\, 2\,\Omega_k\,\big)\,. \tag{32}$$

Nous avons vu au paragraphe 3 que les structures des deux gammes primitives à deux notes, à savoir

$$\mathcal{S}_1 = \Big(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\Big)\,,\; \mathcal{S}_2 = \Big(\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\Big)$$

permettent de construire de proche en proche la suite infinie $\big(\Omega_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ de toutes les notes.

Une fois la structure multiplicative fixée, la transposition avec comme première note $\Omega_k$ permet de faire varier la hauteur absolue, mais pas les intervalles entre les notes d'une même gamme. Nous l'avons explicitement utilisée avec les gammes à cinq notes. Afin de s'autoriser une richesse tonale arbitraire, nous ne devons retenir de la construction proposée au paragraphe 6 que la structure multiplicative des différentes gammes. Le paragraphe suivant propose d'y mettre un peu d'ordre, avec une classification en « type » et « mode ».

## 9) Type et mode

On suppose dans ce paragraphe que l'on a fixé le nombre $p$ de notes (avec $p$ de la forme $p = p_k$ pour un certain entier $k$ que l'on n'écrit pas pour alléger les notations), un nombre de tons $T$ et un nombre de demi-tons $D$, la valeur du ton $\theta$ et du demi-ton $\delta$. On s'intéresse à l'ensemble des gammes commençant par la note *do* et comportant exactement $p$ notes.

L'ensemble $\mathbf{S}^p$ des structures multiplicatives des gammes à $p$ notes est l'ensemble des $p$-uplets à valeurs dans la paire $\{\theta,\, \delta\}$ tels que le nombre de tons $\theta$ est égal à $T$ et le nombre de demi-tons $\delta$ est exactement égal à $D$ :

$$\mathbf{S}^p = \big\{(\mu_1,\, \mu_2,\, \cdots\,,\, \mu_p),\, \mu_j \in \{\theta,\, \delta\} \text{ si } 1 \leq j \leq p,\, \sharp\{j,\, \mu_j = \theta\} = T,\, \sharp\{j,\, \mu_j = \delta\} = D\big\}\,.$$

Il est facile de voir que l'ensemble $\mathbf{S}^p$ comporte exactement $N = \binom{p}{T}$ éléments distincts, comme pour l'ensemble des gammes à $p$ notes, puisqu'il suffit de choisir la position des $T$ tons parmi les $p$ possibles rapports des notes successives.

On regarde maintenant comment agit la permutation circulaire $\sigma$ définie par la transformation $1 \longmapsto 2,\ 2 \longmapsto 3$, ..., $p-1 \longmapsto p$ et $p \longmapsto 1$ de l'ensemble $\{1,\, \cdots\,,\, p\}$ :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & p-1 & p \\ 2 & 3 & \dots & p & 1 \end{pmatrix}$$

sur l'ensemble $\mathbf{S}^p$ des structures multiplicatives des gammes à $p$ notes. À partir d'une configuration donnée $(\mu_1,\, \mu_2\,,\, \cdots\,,\, \mu_p)$ appartenant à $\mathbf{S}^p$, on pose

$$\sigma\,(\mu_1,\, \mu_2\,,\, \cdots\,,\, \mu_p) = \big(\,\mu_{\sigma(1)},\, \mu_{\sigma(2)}\,,\, \cdots\,,\, \mu_{\sigma(p)}\,\big)$$

qui appartient encore à la famille $\mathbf{S}^p$. Deux structures multiplicatives $(\mu_1,\, \mu_2,\, \cdots\ \ \cdots\,,\, \mu_p)$ et $(\mu'_1,\, \mu'_2\,,\, \cdots\,,\, \mu'_p)$ sont dites « de même type » si il existe une permutation circulaire $\sigma$ de l'ensemble $\{1, \cdots\,,\, p\}$ et un entier $i \in \{0,\, \cdots\,,\, p-1\}$ de sorte que

$$\mu'_j = \mu_{\sigma^i(j)} \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } 1 \leq j \leq p\,. \tag{33}$$

L'ensemble $\mathbf{T}^p$ des types des gammes à $p$ notes est l'ensemble des structures multiplicatives des gammes à $p$ notes à une permutation circulaire près. Le nombre de types

$$\sharp\,\mathbf{T}^p = \frac{1}{p}\binom{p}{T} \quad ; \quad p = T + D$$

est bien un nombre entier, comme on l'a vu lors de la proposition 2 du paragraphe 7. Il y a un seul type de gammes à deux notes et un seul type de gammes à trois notes, 2 types de gammes à cinq notes, 3 types de gammes à sept notes, 66 types de gammes à douze notes, *etc.* D'un point de vue mathématique, l'ensemble des types $\mathbf{T}^p$ est le quotient de l'ensemble $\mathbf{S}^p$ par la relation d'équivalence $\sim$ suivante :

$$\mu \,\sim\, \mu' \text{ si et seulement si } \exists\, i \in \{0,\, \cdots\,,\, p-1\}, \text{ la relation (33) a lieu}$$

et on note $\mathbf{T}^p = \mathbf{S}^p/\sim$. D'un point de vue pratique, le type définit la succession précise des tons et des demi-tons, mais à une permutation circulaire près.

On suppose dans la suite qu'un représentant $\tau \in \widetilde{\tau}$ de chaque type $\widetilde{\tau} \in \mathbf{T}^p$ a été choisi. Il s'agit d'une structure multiplicative, à une permutation près :

$$\tau = \big(\,\mu_1,\, \mu_2\,,\, \cdots\,,\, \mu_j,\, \cdots\,,\, \mu_p\big) \,\in\, \widetilde{\tau} \,\in\, \mathbf{T}^p\,. \tag{34}$$

Pour les gammes de moins de cinq notes, nous proposons le choix suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \tau^1 & = & \big(\frac{3}{2},\, \frac{4}{3}\big) & \in\ \mathbf{S}^2 \\ \tau^2 & = & \big(\frac{4}{3},\, \frac{9}{8},\, \frac{4}{3}\big) & \in\ \mathbf{S}^3 \\ \tau^3_1 & = & \big(\frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27}\big) & \in\ \mathbf{S}^5 \\ \tau^3_2 & = & \big(\frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8}\big) & \in\ \mathbf{S}^5\,. \end{array} \right.$$

On a alors, compte tenu des relations (4) (13) et de la structure des gammes $\big(\mathcal{G}_3^3\big)$ et $\big(\mathcal{G}_5^3\big)$ :

$$\mathcal{S}\big(\mathcal{G}_1^1\big) = \tau^1\,,\ \mathcal{S}\big(\mathcal{G}_2^2\big) = \tau^2\,,\ \mathcal{S}\big(\mathcal{G}_5^3\big) = \tau_1^3\,,\ \mathcal{S}\big(\mathcal{G}_3^3\big) = \tau_2^3\,. \tag{35}$$

Une fois le type fixé et (surtout) une structure multiplicative $\tau$ qui le représente, on construit simplement une « gamme fondamentale » $\mathcal{G}_\tau$ en commençant par convention par la note *do*, comme on l'a vu aux relations (35) pour les gammes à deux, trois et cinq notes. Il est alors naturel de fabriquer les autres gammes de même type, mais par définition de « mode » différent, en construisant les $p$ gammes ayant les mêmes notes que $\mathcal{G}_\tau$, mais obtenues par action successive de la permutation circulaire $\sigma$. Si le type $\tau$ a un représentant donné à la relation (34), on a (cf. (32)) :

$$\mathcal{G}_\tau = \big(\,\omega_0,\, \mu_1\,\omega_0,\, \cdots\,,\, (\mu_1\cdots\mu_j)\,\omega_0,\, \cdots\,,\, (\mu_1\cdots\mu_{p-1})\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,\big)\,.$$

Nous notons $\nu(\tau,\, i)$ les notes $p$ d'une gamme $\mathcal{G}_\tau$ de type $\tau$ avec $0 \leq i < p$ et par convention $\nu(\tau,\, 0) = \Omega_0 = do$. De plus, si $\tau = (\mu_1,\, \mu_2\,,\, \cdots\,,\, \mu_j,\, \cdots\,,\, \mu_p)$, on a les relations

$$\nu(\tau,\, i+1) = \mu_i\ \nu(\tau,\, i)$$

pour $1 \leq i < p-1$. Par exemple, pour la gamme à une seule note $\mathcal{G}_1^1 = (do,\, sol,\, do^*)$ de type $\tau^1$, on a simplement

$$\nu(\tau^1,\, 0) = do,\ \nu(\tau^1,\, 1) = sol\,.$$

Pour une gamme à trois notes, $\mathcal{G}_1^2 = (do,\, fa,\, sol,\, do^*)$ de type $\tau^2$, on a

$$\nu(\tau^2,\, 0) = do,\ \nu(\tau^2,\, 1) = fa,\ \nu(\tau^2,\, 2) = sol\,. \tag{36}$$

Pour les gammes à 5 notes, on dispose d'abord du type $\tau_1^3 = (\theta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \theta_3)$ comme pour la gamme $\mathcal{G}_5^3 = (do,\, mi\flat,\, fa,\, sol,\, la,\, do^*)$ et on en déduit simplement

$$\nu(\tau_1^3,\, 0) = do,\ \nu(\tau_1^3,\, 1) = mi\flat,\ \nu(\tau_1^3,\, 2) = fa,\ \nu(\tau_1^3,\, 3) = sol,\ \nu(\tau_1^3,\, 4) = la\,. \tag{37}$$

Pour le type $\tau_2^3 = (\delta_3,\, \theta_3,\, \delta_3,\, \theta_3,\, \delta_3)$, le représentant naturel est $\mathcal{G}_3^3 = (do,\, ré,\, fa,\, sol,\, si\flat,\, do^*)$ et

$$\nu(\tau_2^3,\, 0) = do,\ \nu(\tau_2^3,\, 1) = ré,\ \nu(\tau_2^3,\, 2) = fa,\ \nu(\tau_2^3,\, 3) = sol,\ \nu(\tau_2^3,\, 4) = si\flat\,. \tag{38}$$

Avec les notes $\nu(\tau,\, i)$, nous formons une nouvelle gamme simplement en changeant la première note et en laissant agir la permutation circulaire. Nous définissons de cette façon un nouveau mode. Par exemple, pour une gamme à deux notes, on obtient à partir de $\nu(\tau^1,\, 1) = sol$, la gamme $(sol,\, do^*,\, sol^*)$. Ce « mode de sol » définit la gamme $\mathcal{G}(\tau^1,\, 1)$ qui est identique à la gamme $\mathcal{G}_2^1(sol) = \mathcal{G}_2^1(\Omega_1)$ obtenue à partir de la gamme $\mathcal{G}_2^1 = (do,\, fa,\, do^*)$.

Le « mode » $i \in \{0, \cdots, p-1\}$ du type $\tau$ est engendré par la gamme de première note $\nu(\tau,\, i)$ et de structure $\big(\mu_{\sigma^i(1)},\, \mu_{\sigma^i(2)}\,,\, \cdots\,,\, \mu_{\sigma^i(p)}\big)$ : on fait agir $i$ fois la permutation circulaire $\sigma$ de référence. On pose en conséquence :

$$\mathcal{G}(\tau,\, i) = \big(\,\nu(\tau,\, i),\, \nu(\tau,\, i+1),\, \cdots\,,\, \nu(\tau,\, p-1),\, 2\,\Omega_0,\, 2\,\nu(\tau,\, 1),\, \cdots\,,\, 2\,\nu(\tau,\, i-1)\,\big)$$

et on a par définition même

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}(\tau,\, i)) = \big(\,\mu_{\sigma^i(1)},\, \mu_{\sigma^i(2)}\,,\, \cdots\,,\, \mu_{\sigma^i(p)}\,\big)\,.$$

Il peut être utile de nommer le mode, c'est à dire le choix précis de la structure multiplicative à travers le type et l'ordre de la permutation circulaire grâce au nom de la première note $\nu(\tau,\, i)$. Pour les gammes à deux notes, on a un seul type et deux modes, le mode de *do* qui débute par une quinte et le mode de *sol* qui commence par une quarte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}(\tau^1,\, 0) = \mathcal{G}(\tau^1,\, \textit{do}) = \big(\, \textit{do},\, \textit{sol},\, \textit{do}^* \,\big) = \mathcal{G}_1^1 \\ \mathcal{G}(\tau^1,\, 1) = \mathcal{G}(\tau^1,\, \textit{sol}) = \big(\, \textit{sol},\, \textit{do},\, \textit{sol}^* \,\big) = \mathcal{G}_2^1(\textit{sol})\,. \end{array} \right.$$

Pour les gammes à trois notes, on a encore un seul type, donné à la relation (36) mais, outre le mode de *do*, on dispose des modes de *fa* et de *sol* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}(\tau^2,\, 0) = \mathcal{G}(\tau^1,\, \textit{do}) = \big(\, \textit{do},\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{do}^* \,\big) = \mathcal{G}_2^2 \\ \mathcal{G}(\tau^2,\, 1) = \mathcal{G}(\tau^2,\, \textit{fa}) = \big(\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{do}^*,\, \textit{fa}^* \,\big) = \mathcal{G}_2^1(\Omega_{-1}) \\ \mathcal{G}(\tau^2,\, 2) = \mathcal{G}(\tau^2,\, \textit{sol}) = \big(\, \textit{sol},\, \textit{do}^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^* \,\big) = \mathcal{G}_2^3(\Omega_1)\,. \end{array} \right.$$

Pour les gammes à cinq notes, la classification (type, mode) permet un nouveau rangement des dix gammes vues au paragraphe 5 comme des gammes qui débutent par la note *do*. On trouve pour le premier type (relation (37)), les cinq modes de *do*, *mi*$\flat$, *fa*, *sol*, *la* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}(\tau_1^3,\, 0) = \mathcal{G}(\tau^1,\, \textit{do}) = \big(\, \textit{do},\, \textit{mi}\flat,\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{la},\, \textit{do}^* \,\big) = \mathcal{G}_5^3 \\ \mathcal{G}(\tau_1^3,\, 1) = \mathcal{G}(\tau_1^3,\, \textit{mi}\flat) = \big(\, \textit{mi}\flat,\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{la},\, \textit{do}^*,\, \textit{mi}\flat^* \,\big) = \mathcal{G}_{10}^3(\Omega_{-3}) \\ \mathcal{G}(\tau_1^3,\, 2) = \mathcal{G}(\tau_1^3,\, \textit{fa}) = \big(\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{la},\, \textit{do}^*,\, \textit{mi}\flat^*,\, \textit{fa}^* \,\big) = \mathcal{G}_4^3(\Omega_{-1}) \\ \mathcal{G}(\tau_1^3,\, 3) = \mathcal{G}(\tau_1^3,\, \textit{sol}) = \big(\, \textit{sol},\, \textit{la},\, \textit{do}^*,\, \textit{mi}\flat^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^* \,\big) = \mathcal{G}_7^3(\Omega_1) \\ \mathcal{G}(\tau_1^3,\, 4) = \mathcal{G}(\tau_1^3,\, \textit{la}) = \big(\, \textit{la},\, \textit{do}^*,\, \textit{mi}\flat^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^*,\, \textit{la}^* \,\big) \;=\; \mathcal{G}_9^3(\Omega_3)\,. \end{array} \right.$$

Pour le second type (relation (38)), on dispose des cinq modes de *do*, *ré*, *fa*, *sol* et *si*$\flat$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}(\tau_2^3,\, 0) = \mathcal{G}(\tau^1,\, \textit{do}) = \big(\, \textit{do},\, \textit{ré},\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^* \,\big) = \mathcal{G}_3^3 \\ \mathcal{G}(\tau_2^3,\, 1) = \mathcal{G}(\tau_1^3,\, \textit{ré}) = \big(\, \textit{ré},\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^* \,\big) = \mathcal{G}_8^3(\Omega_2) \\ \mathcal{G}(\tau_2^3,\, 2) = \mathcal{G}(\tau_1^3,\, \textit{fa}) = \big(\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^*,\, \textit{fa}^* \,\big) = \mathcal{G}_2^3(\Omega_{-1}) \\ \mathcal{G}(\tau_2^3,\, 3) = \mathcal{G}(\tau_1^3,\, \textit{sol}) = \big(\, \textit{sol},\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^* \,\big) = \mathcal{G}_6^3(\Omega_1) \\ \mathcal{G}(\tau_2^3,\, 4) = \mathcal{G}(\tau_2^3,\, \textit{si}\flat) = \big(\, \textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^*,\, \textit{si}\flat^* \,\big) = \mathcal{G}_1^3(\Omega_{-2})\,. \end{array} \right.$$

On retrouve en particulier des transpositions de la gamme pentatonique majeure $\mathcal{G}_1^3$ et de la gamme pentatonique mineure $\mathcal{G}_6^3$.

De façon générale, la structure formée avec le couple (type, mode) $=$ $(\tau,\, i)$ permet de classifier les gammes d'une famille $k$ donnée et qui commencent par la note *do*. On peut noter $\mathcal{G}(\tau,\, i)$ une gamme de cette famille ou éventuellement $\mathcal{G}(\tau,\, \textit{note})$ si $\nu(\tau,\, i) = \textit{note}$. Ensuite le choix d'une tonalité permet de faire commencer la gamme par une note arbitraire $\Omega_\ell$ et on obtient ainsi la gamme $\mathcal{G}(\tau,\, i)(\Omega_\ell)$. Par exemple, $\mathcal{G}(\tau_2^3,\, 4) = (\Omega_{-2},\, \Omega_0^*,\, \Omega_2^*,\, \Omega_{-1}^*,\, \Omega_1^*,\, \Omega_{-2}^*)$ et

$$\mathcal{G}(\tau_2^3,\, 4)(\Omega_0) = \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_0^*\big) = \big(\textit{do},\, \textit{ré},\, \textit{mi},\, \textit{sol},\, \textit{la},\, \textit{do}^*\big) = \mathcal{G}_1^3\,.$$

On a aussi $\mathcal{G}(\tau_2^3,\, 2) = (\Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-2},\, \Omega_0^*,\, \Omega_2^*,\, \Omega_{-1}^*)$ et on en déduit

$$\mathcal{G}(\tau_2^3,\, 2)(\Omega_0) = \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_0^*\big) = \big(\textit{do},\, \textit{ré},\, \textit{fa},\, \textit{sol},\, \textit{la},\, \textit{do}^*\big) = \mathcal{G}_2^3\,.$$

Ayant maintenant une structure de la forme (type, mode, tonalité) pour les différentes gammes, nous pouvons aborder l'étude détaillée des gammes à sept notes.

## 10) Gammes à sept notes

Avec les définitions introduites plus haut, il existe 21 gammes à 7 notes qui commencent par la note *do*, composées de 5 tons $\theta_4$ où

$$\theta_4 = \xi_2 = \frac{9}{8}$$

et de deux demi-tons $\delta_4$ avec

$$\delta_4 = \xi_{-5} = \frac{2^8}{3^5} \,.$$

Nous proposons de les construire dans ce paragraphe, en utilisant la classification par type et mode introduite dans les paragraphes précédents. On dispose de trois types pour ces 21 gammes et pour chacun de ces types, de sept modes. Nous proposons ici, mais il s'agit d'une convention et d'autres choix équivalents sont possibles, de caractériser ces trois types par la « distance » entre les deux demi-tons : jointifs pour le type $\tau_1^4$ et distants d'un ton pour le second type $\tau_2^4$. De plus, si l'on garde en mémoire l'hypothèse d'invariance d'un type par permutation circulaire, les deux demi-tons du troisième type $\tau_3^4$ sont distants de trois tons, ou bien de deux tons par périodicité :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_1^4 = \big(\theta_4,\, \theta_4,\, \delta_4,\, \delta_4,\, \theta_4,\, \theta_4,\, \theta_4\big) \\ \tau_2^4 = \big(\theta_4,\, \theta_4,\, \delta_4,\, \theta_4,\, \delta_4,\, \theta_4,\, \theta_4\big) \\ \tau_3^4 = \big(\theta_4,\, \theta_4,\, \delta_4,\, \theta_4,\, \theta_4,\, \theta_4,\, \delta_4\big) \,. \end{array} \right.$$

Le troisième type $\tau_3^4$ est appelé « classique » dans la suite.

Pour ces trois types, les gammes fondamentales, c'est à dire en mode de *do*, s'écrivent facilement. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}(\tau_1^4,\, 0) = \big(do,\, ré,\, mi,\, fa,\, sol\flat,\, la\flat\,,\, si\flat\,,\, do^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big) \\ \mathcal{G}(\tau_2^4,\, 0) = \big(do,\, ré,\, mi,\, fa,\, sol,\, la\flat\,,\, si\flat\,,\, do^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big) \\ \mathcal{G}(\tau_3^4,\, 0) = \big(do,\, ré,\, mi,\, fa,\, sol,\, la\,,\, si,\, do^*\big) = \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_5,\, 2\,\Omega_0\big) \end{array} \right.$$

ce qui permet (enfin !) de retrouver la gamme la plus « élémentaire » de *do* majeur avec le type classique. Pour chacun de ces types, on dispose de sept modes distincts. Leurs noms sont obtenus en lisant les noms des notes des gammes précédentes, choisies pour la classification. Il vient :

$$(39) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \text{modes de type } \tau_1^4 \,:\, do,\, ré,\, mi,\, fa,\, sol\flat,\, la\flat,\, si\flat \\ \text{modes de type } \tau_2^4 \,:\, do,\, ré,\, mi,\, fa,\, sol,\, la\flat,\, si\flat \\ \text{modes (classiques) de type } \tau_3^4 \,:\, do,\, ré,\, mi,\, fa,\, sol,\, la,\, si\,. \end{array} \right.$$

Pour chacun des modes, nous détaillons la gamme de tonalité *do*, qui par définition commence par *do*, et ce processus fournit une suite possible des 21 gammes à sept notes. Nous notons parfois les gammes $\mathcal{G}(\tau^4,\, i)$ en remplaçant le numéro du mode par la note correspondante dans l'une des listes précédentes. On a bien sûr toujours $\mathcal{G}(\tau^4,\, 0) = \mathcal{G}(\tau^4,\, do)$ et par exemple $\mathcal{G}(\tau_3^4,\, 5) = \mathcal{G}(\tau_3^4,\, la)$. Nous explicitons maintenant les gammes qui caractérisent les sept modes pour chacun des trois types. Pour le premier type $\tau_1^4$, la suite des modes est donnée à la première des relations (39). On retrouve d'abord :

$$\mathcal{G}_1^4 = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, 0) = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, do) = \left\{ \begin{array}{l} \big(do,\, ré,\, mi,\, fa,\, sol\flat,\, la\flat,\, si\flat,\, do^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big) \,. \end{array} \right.$$

Ce mode est parfois appelé « mode arabe ». Les six autres modes s'obtiennent en permuttant petit à petit les 7 notes de cette gamme. Nous les présentons avec une transposition en *do* afin de pouvoir les comparer facilement. Pour la première permutation, on trouve

$$\mathcal{G}_2^4 = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, 1) = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, \textit{ré}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi}\flat,\ \textit{fa}\flat,\ \textit{sol}\flat,\ \textit{la}\flat,\ \textit{si}\flat,\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-8},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

On recommence le même exercice pour les cinq modes de ce premier type à demi-tons jointifs. Le résultat de ce calcul est explicité dans la liste qui suit. On a

$$\mathcal{G}_3^4 = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, 2) = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, \textit{mi}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré}\flat,\ \textit{mi}\flat\flat,\ \textit{fa}\flat,\ \textit{sol}\flat,\ \textit{la}\flat,\ \textit{si}\flat,\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_{-5},\, \Omega_{-10},\, \Omega_{-8},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,, \end{array} \right.$$

$$\mathcal{G}_4^4 = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, 3) = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, \textit{fa}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré}\flat,\ \textit{mi}\flat,\ \textit{fa, sol, la, si, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_{-5},\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_5,\, 2\,\Omega_0\big) \end{array} \right.$$

et ce mode est appelé quelquefois « mode napolitain ». On a ensuite

$$\mathcal{G}_5^4 = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, 4) = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, \textit{sol}\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa}\sharp,\ \textit{sol}\sharp,\ \textit{la}\sharp,\ \textit{si, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_6,\, \Omega_8,\, \Omega_{10},\, \Omega_5,\, 2\,\Omega_0\big)\,, \end{array} \right.$$

dite « gamme par tons et sensible », puis

$$\mathcal{G}_6^4 = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, 5) = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, \textit{la}\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa}\sharp,\ \textit{sol}\sharp,\ \textit{la, si}\flat,\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_6,\, \Omega_8,\, \Omega_3,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,, \end{array} \right.$$

ou mode « hypolydien » et

$$\mathcal{G}_7^4 = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, 6) = \mathcal{G}(\tau_1^4,\, \textit{si}\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa}\sharp,\ \textit{sol, la}\flat,\ \textit{si}\flat\ ,\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_6,\, \Omega_1,\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,, \end{array} \right.$$

le mode « lydien-phrygien ». Ces modes ne semblent pas complètement formalisés à notre connaissance. Bien entendu, on peut ensuite transposer ces différentes gammes en une tonalité $\Omega_\ell$ arbitraire et construire par exemple une gamme $\mathcal{G}_7^4(\textit{sol})$ ; il est facile de décaler les numéros des notes d'une unité puis de les nommer en prenant la note correspondante à l'octave supérieure en cas de besoin. Nous obtenons ainsi

$$\mathcal{G}_7^4(\textit{sol}) = \big(\Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_5,\, \Omega_7,\, \Omega_2,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, 2\,\Omega_0\big) = \big(\textit{sol, la, si, do}\sharp^*,\ \textit{ré}^*,\ \textit{mi}\flat^*,\ \textit{fa}^*,\ \textit{sol}^*\big)\,.$$

Pour le second type $\tau_2^4$, caractérisé par le fait qu'un ton sépare les deux demi-tons, la suite des modes est donnée par la seconde relation (39). Nous poursuivons aussi une numérotation globale des gammes à 7 notes. Nous choisissons toujours de faire opérer ces modes sur la tonalité de *do*. Nous avons pour le premier mode

$$\mathcal{G}_8^4 = \mathcal{G}(\tau_2^4,\, 0) = \mathcal{G}(\tau_2^4,\, \textit{do}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa, sol, la}\flat,\ \textit{si}\flat,\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

Notons que les gammes $\mathcal{G}_1^4$ et $\mathcal{G}_8^4$ sont différentes : le *sol*♭ de $\mathcal{G}_1^4$ devient un sol pour $\mathcal{G}_8^4$. On passe ensuite au mode de *ré* avec

$$\mathcal{G}_9^4 = \mathcal{G}(\tau_2^4,\, 1) = \mathcal{G}(\tau_2^4,\, \textit{ré}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi}\flat,\ \textit{fa, sol}\flat,\ \textit{la}\flat,\ \textit{si}\flat,\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

Les autres modes de ce second type $\tau_2^4$ se construisent de la même manière :

$$\mathcal{G}_{10}^4 = \mathcal{G}(\tau_2^4,\, 2) = \mathcal{G}(\tau_2^4,\, \textit{mi}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré}\flat,\ \textit{mi}\flat,\ \textit{fa}\flat,\ \textit{sol}\flat,\ \textit{la}\flat,\ \textit{si}\flat\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_{-5},\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-8},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big) \end{array} \right.$$

$$\mathcal{G}^4_{11} = \mathcal{G}(\tau^4_2,\, 3) = \mathcal{G}(\tau^4_2,\, \textit{fa}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi}\flat\textit{, fa, sol, la, si, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_5,\, 2\,\Omega_0\big) \end{array} \right.$$
$$\mathcal{G}^4_{12} = \mathcal{G}(\tau^4_2,\, 4) = \mathcal{G}(\tau^4_2,\, \textit{sol}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré}\flat\textit{, mi}\flat\textit{, fa, sol, la, si}\flat\textit{, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_{-5},\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big) \end{array} \right.$$
$$\mathcal{G}^4_{13} = \mathcal{G}(\tau^4_2,\, 5) = \mathcal{G}(\tau^4_2,\, \textit{la}\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa}\sharp\textit{, sol}\sharp\textit{, la, si, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_6,\, \Omega_8\ ,\, \Omega_3,\, \Omega_5,\, 2\,\Omega_0\big) \end{array} \right.$$
$$\mathcal{G}^4_{14} = \mathcal{G}(\tau^4_2,\, 6) = \mathcal{G}(\tau^4_2,\, \textit{si}\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa}\sharp\textit{, sol, la, si}\flat\textit{, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_6,\, \Omega_1\ ,\, \Omega_3,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

Ce dernier mode est parfois appelé « mode de Bartok » et nous renvoyons au livre de Ernö Lendvai (1971) pour une analyse des différentes structures musicales créées par Bélà Bartók. On retrouve aussi ce mode dans la musique indienne sous le nom de « Raga Vachaspati ». Signalons aussi l'œuvre de Christian Clavère (2021), création musicale au violon inspirée par la gamme $\mathcal{G}^4_{14}$.

Pour le type classique $\tau^4_3$, la suite des modes est donnée par la troisième relation (39), la suite plus courante des notes « sans altération ». Les tonalités de la gamme de *do* s'écrivent dans ces sept modes en suivant la même approche. On a d'abord

$$\mathcal{G}^4_{15} = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, 0) = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, \textit{do}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa, sol, la, si, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_5,\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

C'est le mode ionien, ou mode « majeur » de la musique occidentale, défini avec la gamme de *do* majeur. C'est bien sûr « la » gamme de référence ! On peut ensuite transposer ce mode de *do*, par exemple en *si*$\flat$. On retranche deux unités aux notes $\Omega_\ell$ de la gamme $\mathcal{G}^4_{15}$ initiale et on trouve $\mathcal{G}^4_{15}(\Omega_{-2}) = \mathcal{G}^4_{15}(\textit{si}\flat)$ :

$$\mathcal{G}^4_{15}(\textit{si}\flat) = \big(\Omega_{-2},\, \Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_{-2}\big) = \big(\textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}^*,\, \textit{mi}\flat^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^*,\, \textit{la}^*,\, \textit{si}\flat^*\big).$$

On obtient tout simplement la tonalité de de *si*$\flat$ majeur. On poursuit l'énumération des différents modes classiques associés au type $\tau^4_3$. La note suivante est un *ré* ; on obtient le mode de *ré* ou mode dorien. Il a le charme de la musique du moyen-âge et est utilisé par Jean-Sébastien Bach dans les années 1715 pour sa *Toccata et fugue dorienne* (en *ré* mineur), BWV 538. Nous l'écrivons en commençant par la note *do* :

$$\mathcal{G}^4_{16} = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, 1) = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, \textit{ré}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi}\flat\textit{, fa, sol, la, si}\flat\textit{, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

On ne confondra pas $\mathcal{G}^4_{16}(\textit{si}\flat)$ donnée par la suite $\big(\Omega_{-2},\, \Omega_0,\, \Omega_{-5},\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-4},\, 2\,\Omega_{-2}\big)$, c'est à dire

$$\mathcal{G}^4_{16}(\textit{si}\flat) = \big(\textit{si}\flat,\, \textit{do}^*,\, \textit{ré}\flat^*,\, \textit{mi}\flat^*,\textit{fa}^*\ ,\, \textit{sol}^*,\, \textit{la}\flat^*,\, \textit{si}\flat^*\big),$$

avec la gamme de *si*$\flat$ majeur rappelée quelques lignes ci-dessus ! Le mode de *mi*, ou mode phrygien, commence la gamme par un demi-ton. Il est associé à la gamme qui suit :

$$\mathcal{G}^4_{17} = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, 2) = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, \textit{mi}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré}\flat\textit{, mi}\flat\textit{, fa, sol, la}\flat\textit{, si}\flat\textit{, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_{-5},\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

Il est explicitement utilisé par Jehan Alain (1930) dans sa *Ballade en mode phrygien* pour orgue. Le mode suivant, ou mode de *fa*, mode lydien :

$$\mathcal{G}^4_{18} = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, 3) = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, \textit{fa}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa}\sharp\textit{, sol, la, si, do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_6,\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_5,\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

Un exemple célèbre du mode *fa* de date de 1825 : c'est le troisième mouvement du *Quatuor à cordes numéro 15* de Ludwig van Beethoven (voir par exemple Daniel K. L. Chua, 1995). On ne doit bien sûr pas confondre le mode de *fa* avec la gamme de *fa* majeur qui est égale à $\mathcal{G}^4_{15}(\textit{fa})$ et possède un $\textit{si}\,\flat$. On le retrouve aussi dans la musique populaire.

Le mode de *sol* est éclatant ; on le nomme aussi mode mixolydien :

$$\mathcal{G}^4_{19} = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, 4) = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, \textit{sol}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré, mi, fa, sol, la, si}\,\flat,\, \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

On le retrouve par exemple dans la pièce pour piano *L'Isle joyeuse*, de Claude Debussy (Dmitri Tymoczk, 2004) ou dans la musique populaire avec plusieurs chansons des Beatles comme *Norwegian wood* ou *If I needed someone* (voir par exemple l'ouvrage édité en 2006 par Kenneth Womack and Todd F. Davis). Il est bien entendu différent de la gamme de *sol* majeur, c'est à dire $\mathcal{G}^4_{15}(\textit{sol})$ qui possède un $\textit{fa}\,\sharp$ ce qui n'est pas le cas de $\mathcal{G}^4_{19}(\textit{sol}) = \big(\textit{sol, la, si, do}^*,\, \textit{ré}^*,\, \textit{mi}^*,\, \textit{fa}^*,\, \textit{sol}^*\big)$.

Le mode de *la* ou mode éolien, est aussi le mode « mineur » de la musique occidentale. Nous le donnons, comme les autres modes, dans la tonalité de *do*, c'est à dire avec la gamme de *do* mineur :

$$\mathcal{G}^4_{20} = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, 5) = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, \textit{la}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do}\ ,\ \textit{ré},\ \textit{mi}\,\flat,\ \textit{fa, sol, la}\,\flat,\ \textit{si}\,\flat,\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

Enfin, le mode de *si*, ou mode locrien, commence, comme le mode de *mi*, la gamme par un demi-ton :

$$\mathcal{G}^4_{21} = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, 6) = \mathcal{G}(\tau^4_3,\, \textit{si}) = \left\{ \begin{array}{l} \big(\textit{do, ré}\,\flat,\ \textit{mi}\,\flat,\ \textit{fa, sol}\,\flat,\ \textit{la}\,\flat,\ \textit{si}\,\flat,\ \textit{do}^*\big) \\ \big(\Omega_0,\, \Omega_{-5},\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0\big)\,. \end{array} \right.$$

Il est beaucoup plus rare que les modes précédents. L'ouvrage de Vincent Persichetti (1961) donne toute une liste de compositeurs du 20e siècle qui ont utilisé le mode locrien ; nous retenons par exemple l'œuvre *Ludus tonalis* de Paul Hindemith (1942).

Les 21 modes qui caractérisent les gammes à 7 notes de la famille exposée dans ce travail font apparaître les modes majeurs et mineurs, modes dominants de la musique occidentale, ainsi que des modes issus des anciens modes grecs. Les autres modes qui ne sont pas toujours fondés sur le tétracorde ; ils semblent avoir été découverts ou reconstruits plus tard, comme les noms qu'ils portent l'indiquent. Enfin, les structures étudiées ici sont contraintes par deux sortes d'intervalles seulement, ton et demi-ton, ce qui ne correspond pas toujours à la pratique des musiciens et des compositeurs, comme en témoigne par exemple l'existence de la note sensible au sein du mode mineur.

## Conclusion

Dans cette contribution, nous sommes partis d'une division très simple de l'octave en une quinte et une quarte pour former des gammes primitives à deux notes. Nous avons montré ensuite qu'avec cette notion élémentaire, l'invariance multiplicative des tonalités induit naturellement un nombre de notes *a priori* infini. Nous avons alors proposé une définition récursive d'une famille de gammes qui permet de reconstruire la gamme de Pythagore et ses diverses variantes. Une classification en type et mode utilise la structure cyclique du motif formé par la suite des tons et demi-tons. Nous avons détaillé l'exemple des gammes à sept notes, en insistant sur le fait que deux structures seulement sur les vingt et une possibles sont utilisées dans la musique classique occidentale. Observons qu'une telle construction théorique sur un sujet très classique a été quasi formalisée dans des travaux antérieurs (voir par exemple Franck Jedrzejewski, 2007).

Avec une approche qui introduit une grande variété de gammes, nous pouvons envisager la musique globalement, sans se limiter aux constructions occidentales, en particulier pour les gammes pentatoniques abordées dans cette contribution. Nous renvoyons le lecteur à l'article d'Alain Boudet (2006) pour une présentation des gammes occidentales, arabes, chinoises et indiennes. Pour une étude approfondie de la musique arabe du 20e siècle, nous nous référons par exemple à Ahmed et Mohamed Elhabib Hachlef (1993) et pour la musique chinoise, à l'ouvrage de François Picard (1991). Le jazz utilise aussi des gammes pentatoniques et nous suggérons au lecteur les ouvrages de Jacques Siron (1992) et Mark Levine (1995). Enfin, une introduction à la musique indienne est proposée par Patrick Moutal (1987).

Nous avons abordé plusieurs aspects mathématiques élémentaires et pensons que d'autres propositions plus fines et précises seront proposées dans l'avenir. Il est bien sûr possible d'enrichir la construction précédente *via* par un algorithmique plus complexe prenant comme base de construction non seulement le troisième harmonique de la vibration d'une corde mais aussi celui associé au cinquième de la longueur, comme le propose la gamme de Zarlino. Enfin, il semble utile à ce niveau de poursuivre l'exploration des musiques qui utilisent les gammes proposées dans ce mémoire et celles associées à une écriture qui relève d'un tout autre type de construction formelle.

## Annexe A) Une gamme à 8 notes ?

Nous développons dans cette annexe une tentative de brisure de ton d'une gamme pentatonique dans le cas où l'on n'aurait pas pris garde au fait que lors de l'étape précédente de l'algorithme, on brise une quarte par une seconde, le nouveau demi-ton $\delta = \frac{4}{3}/\frac{9}{8} = \frac{32}{27}$ est plus grand que le nouveau ton $\theta = \frac{9}{8}$ puisque $\frac{32}{27} > \frac{9}{8}$. On repart pour fixer les idées d'une gamme pentatonique majeure

$$\mathcal{G}_1^3 = \big(\textit{do, ré, mi, sol, la, do}^*\big) \;=\; \big(\Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0\big)$$

qui comporte avec notre hypothèse trois tons $\theta = \frac{9}{8}$ et deux demi-tons $\delta = \frac{32}{27}$. La structure multiplicative $\mathcal{S}(\mathcal{G}_1^3)$ de cette gamme est donnée par la relation $\mathcal{S}(\mathcal{G}_1^3) = (\theta,\, \theta,\, \delta,\, \theta,\, \delta)$.

On poursuit l'algorithme de construction linéaire et on coupe le ton $\theta$ avec le demi-ton $\delta$. Le nouveau ton $\theta^*$ est donné par la relation $\theta^* = \delta = \frac{32}{27}$ et le nouveau demi-ton $\delta^*$ s'obtient avec une division : $\delta^* = \frac{\theta}{\delta} = \frac{3^2}{2^3}/\frac{2^5}{3^3} = \frac{3^5}{2^8}$. Remarquons qu'il est inférieur à 1 !

On construit une nouvelle gamme d'une part en remplaçant chaque ton $\theta$ de la structure $\mathcal{S}(\mathcal{G}_1^3)$ par un nouveau ton $\theta^*$ suivi d'un nouveau demi-ton $\delta^*$ et d'autre part en remplaçant chaque demi-ton $\delta$ par un ton $\theta^*$. On obtient ainsi une nouvelle structure

$$\mathcal{S}' = (\theta^*,\, \delta^*,\, \theta^*,\, \delta^*,\, \theta^*,\, \theta^*,\, \delta^*,\, \theta^*)$$

avec 5 tons $\theta^*$ et 3 demi-tons $\delta^*$. À partir du *do* initial, on construit une « gamme à 8 notes » qui s'écrit $\mathcal{G}^8 = \big(\Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_2,\, \Omega_{-1},\, \Omega_4,\, \Omega_1,\, \Omega_{-2},\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0\big)$, c'est à dire

$$\mathcal{G}^8 = \big(do,\ mi\flat,\ ré,\ fa,\ mi,\ sol,\ si\flat,\ la,\ do^*\big)\,.$$

Comme le demi-ton $\delta^*$ est inférieur à 1, cette suite de notes n'est pas de fréquences croissantes et l'hypothèse initiale (1) de monotonie n'est plus satisfaite. Est-ce encore une gamme ?

## Annexe B) Preuve de la proposition 3

La Proposition 3 s'établit par récurrence sur $k$. Pour $k = 1$, la première des relations (31) est claire et montre que les relations (29) ont bien lieu, avec de plus $\varepsilon_1 = +1$. Dans le cas général, on a toujours

(40) $$\delta_k < \theta_k$$

et les relations (18) à (22) ont été construites pour maintenir cette propriété. On déduit donc de (40) et de l'hypothèse de récurrence l'inégalité suivante $\frac{3^{-\varepsilon_k T_k}}{2^{\ell(-\varepsilon_k T_k)}} < \frac{3^{\varepsilon_k D_k}}{2^{\ell(\varepsilon_k D_k)}}$, soit

(41) $$\ell(\varepsilon_k\, D_k) - \ell(-\varepsilon_k\, T_k) < \varepsilon_k\, (T_k + D_k)\, \frac{\log 3}{\log 2}\,.$$

De plus, compte tenu de la relation (10), on a

(42) $$\ell(\varepsilon_k\, D_k) \leq \varepsilon_k\, D_k\, \frac{\log 3}{\log 2} < \ell(\varepsilon_k\, D_k) + 1$$

et

$$\ell(-\varepsilon_k\, T_k) \leq -\varepsilon_k\, T_k\, \frac{\log 3}{\log 2} < \ell(-\varepsilon_k\, T_k) + 1$$

dont on déduit par changement de signe

(43) $$-\ell(-\varepsilon_k\, T_k) - 1 < \varepsilon_k\, T_k\, \frac{\log 3}{\log 2} \ \leq\ -\ell(-\varepsilon_k\, T_k)\,.$$

En additionnant les inégalités de droite des relations (42) et (43), il vient

(44) $$\varepsilon_k\, (T_k + D_k)\, \frac{\log 3}{\log 2} < \ell(\varepsilon_k\, D_k) - \ell(-\varepsilon_k\, T_k)\ +\ 1\,.$$

Les relations (41) et (44) établissent donc, compte tenu de la définition (10), la propriété qui suit :

(45) $$\ell(\varepsilon_k\, D_k) - \ell(-\varepsilon_k\, T_k) = l\big(\varepsilon_k\, (T_k + D_k)\big)\,, \quad k \geq 1\,.$$

Nous supposons dans ce paragraphe que la famille de gammes $\mathcal{G}^k$ de numéro $k$ satisfait l'hypothèse $\theta_k < \delta_k^2$. On a alors, compte tenu des relations (18) à (22) :
$T_{k+1} = T_k + D_k,\ D_{k+1} = T_k,\ \theta_{k+1} = \delta_k$ et $\delta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$. Par suite, $\theta_{k+1} = \xi_{-\varepsilon_k\, T_k} = \xi_{-\varepsilon_k\, D_{k+1}}$ et la première relation (29) est vraie à l'ordre $k+1$, en remarquant que

(46) $$\varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_k \quad \text{si} \quad \theta_k < \delta_k^2\,.$$

On a alors le calcul suivant

$$\delta_{k+1} = \frac{\xi_{\varepsilon_k\, D_k}}{\xi_{-\varepsilon_k\, T_k}} = \frac{3^{\varepsilon_k\, D_k}}{2^{\ell(\varepsilon_k\, D_k)}}\, \frac{2^{\ell(-\varepsilon_k\, T_k)}}{3^{-\varepsilon_k\, T_k}} = \frac{3^{\varepsilon_k (T_k + D_k)}}{2^{\ell(\varepsilon_k\, D_k) - \ell(-\varepsilon_k\, T_k)}}$$
$$= \frac{3^{\varepsilon_k (T_k + D_k)}}{2^{\ell(\varepsilon_k (T_k + D_k))}} \qquad \text{compte tenu de la relation (45)}$$
$$= \frac{3^{-\varepsilon_{k+1} T_{k+1}}}{2^{\ell(-\varepsilon_k\, T_{k+1})}} = \xi_{-\varepsilon_{k+1}\, T_{k+1}} \qquad \text{au vu de la relation (46)}$$

et la seconde relation de (29) passe à l'ordre supérieur.

Dans l'autre cas de figure où l'on a $\theta_k > \delta_k^2$, on déduit des relations (18) à (22) : $T_{k+1} = T_k$, $D_{k+1} = T_k + D_k$, $\theta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$ et $\delta_{k+1} = \delta_k$. Il résulte alors des relations (29) : $\delta_{k+1} = \delta_k = \xi_{-\varepsilon_k\, T_k} = \xi_{-\varepsilon_k\, T_{k+1}}$ et la seconde relation (29) est encore vraie à l'ordre $k+1$, avec

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \quad \text{si} \quad \theta_k > \delta_k^2\,.$$

On a alors $\theta_{k+1} = \frac{\xi_{\varepsilon_k\, D_k}}{\xi_{-\varepsilon_k\, T_k}} = \xi_{\varepsilon_k (T_k + D_k)}$ compte tenu de (45) et du calcul mené plus haut, donc $\theta_{k+1} = \xi_{\varepsilon_{k+1} D_{k+1}}$ et la première relation (29) est vraie à l'ordre $k+1$. La proposition 3 est établie. $\square$

## Remerciements

Sans les remarques de Stéphane Dubois, Jean-François Gonzales, Maurice Rosset et Michel Rosset, ce texte n'aurait pas existé. L'édition de 2021 a bénéficié des encouragements de Thomas Hélie, Pierre Mazet et Roger Ohayon et de la lecture très constructive de Johan Broekaert, André Calvet et Christian Clavère. Certaines de leurs suggestions ont parfois été intégrées dans le texte. Cette version doit beaucoup aux encouragements de Marc Chemiller qui a remarqué le lien entre la brisure de ton et le processus d'accordage des instruments dans la Mésopotamie ancienne. Enfin, Sophie Mougel a relu et annoté une version quasi-terminée de ce mémoire. Qu'ils soient tous remerciés pour leur aide !

## Références bibliographiques

C. Abromont, E. de Montalembert, *Guide de la théorie de la musique*, Fayard-Lemoine, Paris, 2001.

M. Andreatta, *Méthodes algébriques en musique et musicologie du 20e siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, Thèse, École des Hautes Études en Sciences Sociales, 2003.

Aristoxène de Tarente, *Éléments harmoniques*, -330, traduction C.-É. Ruelle, P. Haffner, Paris, 1870.

V. Arnold, A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

R. Bosanquet, *An elementary treatise on musical intervals, with an account of an enharmonic harmonium exhibited in the loan collection of scientific instruments*, Macmillan and Co, Londres, 1876.

A. Boudet, Gammes et modes musicaux, academia.edu/44898805 et spirit-science.fr, 2006.

J. Broekaert, Le mésotonique tempéré de Bach, relatif à « Das wohltemperirte Clavier », academia.edu/44820384, 2021.

M. Broué, Les tonalités musicales vues par un mathématicien, in *Le code*, D. Rousseau et M. Morvan éditeurs, pages 41-82, Odile Jacob, Paris, 2002.

A. Calvet, *Le clavier bien obtempéré*, piano e forte éditions, Montpellier, 2020.

J. Chailley, *L'Imbroglio des modes*, Leduc, Paris, 1960.

M. Chemiller, *Les mathématiques naturelles*, Odile Jacob, Paris, 2007.

D. K. L. Chua, *The galitzin quartets of Beethoven: opp. 127, 132, 130*, Princeton university Press, 1995.

C. Clavère, *Gamme G4-14*, https://www.youtube.com/watch?v=y3POXTg1Afk&t=9s, 2021 ; voir aussi https://www.youtube.com/channel/UCaQQyJ3y-3mc5MECbn8oMBw/videos.

A. Daniélou, *Traité de musicologie comparée*, Hermann, Paris, 1959.

M. Demazure, *Cours d'algèbre ; primalité, divisibilité, codes*, Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, Paris, 1997.

M. Duchesne-Guillemin, Sur la restitution de la musique hourrite, *Revue de Musicologie*, volume 66, pages 5-26, 1980.

A. J. Ellis, On the musical scales of various nations, *Journal of the Society of Arts*, volume 33, pages 485-527, 1885.

A. Hachlef et M.-E. Hachlef, *Anthologie de la musique arabe, 1906-1960*, Publisud éditions, Paris, 1993.

T. Hélie, C. Picasso, A. Calvet, The Snail : un nouveau procédé d'analyse et de visualisation du son, Congrès Europiano France, Tours, 2016, hal.archives-ouvertes.fr/hal-01467014, 2016.

Y. Hellegouarch, Gammes naturelles, *La gazette des mathématiciens*, n°81, pages 25-39, juillet 1999 et n°82, pages 13-25, octobre 1999.

H. von Helmholtz, *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1863. Traduction Française de G. Guéroult et A. Wolff, *Théorie physiologique de la musique, fondée sur l'étude des sensations auditives*, Victor Masson et Fils, Paris, 1868.

W. Holder, *A treatise of the natural grounds, and principles of harmony*, J. Heptinstall, London, 1694, 1702 ; W. Pearson, London, 1731.

P. von Jankó, Ueber mehr als zwölfstufige gleichswebende Temperaturen, pages 6-12 *Beiträge zur Akustik und Musikwissenschaft*, volume 3, pages 6-12, édité par C. Stumpf, Leipzig, 1901.

J.-R. Jannot, La lyre et la cithare : les instruments à cordes de la musique étrusque, *L'antiquité classique*, volume 48, pages 469-507, 1979.

F. Jedrzejewski, Tresses néoriemanniennes ; quelques applications musicales de la théorie des nœuds, *L'Ouvert*, volume 114, pages 37-49, Université de Strasbourg, 2007.

E. Lendvai, *Bélà Bartók: an analysis of his music*, with an introduction by A. Bush, Kahn & Averill, Londres, 1971.

M. Levine, *The jazz theory book*, Sher Music Company, Petaluma, Californie, 1995.

F. Marpurg, *Versuch über die musikalische Temperatur nebst einem Anhang über den Rameau und Kirnbergerschen Grundbaß*, Johann Friedrich Korn, Breslau, 1776.

M. Mersenne, *L'Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique*, Sébastien Cramoisy, ruë S. Jacques, aux Cigognes, Paris, 1636.

P. Moutal, *Hindustani Raga Sangeet ; mécanismes de base de la musique classique du nord de l'Inde*, Centre d'Études de Musique Orientale, Paris, 1987.

V. Persichetti, *Twentieth century harmony; creative aspects and practice*, W. W. Norton & Company, New York, 1961.

F. Picard, *La musique chinoise*, Minerve, Paris, 1991.

F. Picard, Modalité et pentatonisme, *Analyse Musicale*, Société française d'analyse musicale, pages 37-46, 2001.

J.-P. Rameau, *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels*, Jean-Baptiste Christophe Ballard, rue Saint-Jean-de-Beauvais, au Mont-Parnasse, Paris, 1722.

H. Riemann, *Riemanns Musiklexikon. Theorie und Geschichte der Musik, die Tonkünstler alter und neuer Zeit mit Angabe ihrer Werke, nebst einer vollständigen Instrumentenkunde*, Verlag des Bibliographischen Instituts, Leipzig, 1882. Traduction Française G. Humbert, *Dictionnaire de musique de Hugo Riemann*, Perrin et Compagnie, Paris, 1900.

A. Schönberg, *Harmonielehre*, Universal Edition, Vienne, 1911.

L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1965.

J. Siron, *La partition intérieure ; jazz, musiques improvisées*, Outre Mesure, Paris, 1992.

S. Stevin, *Van de Spiegheling der Singconst*, manuscrit de 1605, David Bierens de Haan, Amsterdam, 1884.

D. Tymoczko, Scale Networks and Debussy, *Journal of Music Theory*, volume 48, pages 219-294, 2004.

A. Werckmeister, *Musichalische Temperatur*, Quedlinburg, Allemagne, 1691.

K. Womack, T. F. Davis (Eds), *Reading the Beatles: cultural studies, literary criticism, and the fab four*, State University of New York Press, 2006.

S. Woo, *The ceremonial music of Zhu Zaiyu*, Doctorat de Philosophie de l'Université Rutgers, New Jersey, 2017.

I. Wyschnegradsky, *Manuel d'harmonie à quart de ton*, La Sirène Musicale, Paris, 1932.

I. Xenakis, *Musiques formelles*, La Revue Musicale, Paris, 1963.

G. Zarlino da Chioggia, *Le istitutioni harmoniche del reverendo Gioseffo Zarlino da Chioggia Nelle quali ; oltra le materie appartenenti alla mvsica ; si trouano diciarati molti luoghi di peti, historici, & di filosofi*, Venise, 1558.