Pourquoi la gamme a sept notes ? Une mathématique des notes et des gammes

François Dubois

Pourquoi la gamme a sept notes ?
Une mathématique des notes et des gammes

François Dubois
mathématicien appliqué, amateur de musique

19 septembre 2021*

Résumé

Nous proposons une construction algébrique pour les notes de musique et montrons comment les associer de diverses façons pour former des structures musicales. Ainsi émerge toute une famille de gammes avec un nombre fixé de notes : deux, trois, cinq, sept, douze, dix-sept, *etc.* La classification des gammes est naturelle avec la notion de structure multiplicative. L'action d'une structure multiplicative sur une note permet de définir une tonalité. Leur classement fait apparaître les notions de type et de mode. Enfin, nous détaillons le cas des gammes à sept notes.

Introduction

L'être humain a toujours cherché à imiter la musique offerte par la nature : chant des oiseaux, souffle du vent, clapotis des vagues, *etc.* La voix humaine permet d'ailleurs une infinité de modulations et d'expressions sonores. La musique peut aussi être fabriquée avec des objets : un os percé de trous bouchés à volonté permet d'émettre différents sons reproductibles, des notes de musique. Les notes de musique diffèrent par leur hauteur, leur puissance, leur timbre, leur durée. De plus, des sons spécifiques sont parfois émis par des outils. Ainsi, un simple arc met en tension une corde qui vibre lors du départ de la flèche et peut devenir musical pour peu qu'on le dote d'un résonateur, comme on en constate encore l'usage aujourd'hui dans des sociétés dites primitives... La hauteur du son émis dépend de la tension du fil et de la longueur de la corde. Cet instrument de musique fondamental reste une référence pour la construction formelle de la musique avec le monocorde, un instrument à une seule corde. La recherche d'instruments qui produisent des sons harmonieux, de la musique, est une quête qui a traversé toutes les époques et toutes les civilisations.

* Édition remaniée du texte « Une mathématique des notes et des gammes ou "pourquoi la gamme a sept notes ?" », achevé en novembre 1999.

Une fois créée, une musique agréable à l'oreille doit pouvoir être reproduite. D'où une recherche d'un langage musical, avec une codification propre à chaque culture. Ainsi, Pythagore de Samos (-582--496), en plus de son célèbre théorème, nous a transmis une codification des notes de musique et de leur assemblage, une gamme. La « gamme de Pythagore » permet de développer un vocabulaire spécifique pour la musique qui sert de référence à l'écriture musicale durant tout le moyen-âge. Elle est fondée sur l'intervalle de quinte (entre le *do* et le *sol* typiquement) et fait apparaître la fraction $3/2$. Nous y reviendrons. Si aucun écrit de Pythagore ne nous est parvenu, Aristoxène de Tarente, philosophe grec du 4e siècle avant Jésus-Christ, actif vers -330, est l'auteur d'un des premiers ouvrages sur l'harmonie musicale qui nous ait été transmis.

Gioseffo Zarlino (1517-1590) publie en 1558 un traité de musique qui fait la synthèse des connaissances théoriques et pratiques de son époque. Surtout, il remet en cause l'intervalle de tierce (intervalle entre le *do* et le *mi* par exemple) utilisé depuis Pythagore au bénéfice de la tierce majeure caractérisée par un rapport de hauteurs égal à $5/4$. Zarlino propose ainsi une « gamme naturelle » qui utilise la tierce majeure et la quinte. Mais l'émergence des instruments à clavier, où le musicien a accès à un ensemble prédéfini de notes de musique, a demandé des compromis entre l'esthétique des accords et la complexité de la gamme naturelle.

Ce compromis délicat, ce choix du « tempérament », a donné lieu à de très nombreux travaux théoriques et pratiques depuis plusieurs siècles. Dans leur ouvrage didactique, Claude Abromont et Eugène de Montalembert (2001) présentent près de 600 traités sur la théorie de la musique en occident, certains proposés par des compositeurs majeurs ou des mathématiciens très célèbres par ailleurs. Il est bien sûr hors de question d'être exhaustif ici. Nous avons simplement choisi quelques ouvrages qui nous semblent importants. Ainsi, Marin Mersenne (1588-1648) a l'intuition de la nécessité d'un tempérament égal (1636), Simon Stevin (1548-1620), avec son traité sur l'art de chanter retrouvé au 19e siècle, propose une division de l'octave en douze intervalles égaux, tout comme son contemporain en Orient Zhu Zaiyu (1536-1611) avec son ouvrage sur le tempérament égal (voir par exemple la thèse de Woo Shingkwan, 2017). Enfin, Andreas Werckmeister (1645-1706), propose (1691) le développement d'un tempérament égal qui permet de transposer sans difficulté un morceau de musique d'une hauteur à une autre, mais au détriment de tierces souvent bien loin de l'état pur et de quintes parfois très fortement réduites. Pour les liens entre divers tempéraments et « Le clavier bien tempéré » de Jean-Sébastien Bach, nous renvoyons au travail de Johan Broekaert (2021).

Au 17e siècle, Jean-Philippe Rameau (1683-1764), célèbre compositeur français, propose en 1722 son *Traité de l'harmonie* qui sera suivi de plusieurs autres ouvrages. La structure des accords de tierce et de quinte sert d'hypothèse pour développer une théorie de l'harmonie qui aura une grande influence. Et Friedrich Marpurg (1718-1795) lui répond dans son traité de 1776. Au 18e siècle, Robert Bosanquet (1841-1912) propose (1876) une distinction entre le tempérament égal et un tempérament bien tempéré. Enfin, Hugo Riemann (1849-1919) publiera plus de 60 ouvrages, dont son célèbre *Lexique musical* (1882).

Au 20e siècle, les recherches sur la mise en forme de l'écriture musicale se poursuivent. Le compositeur Arnold Schönberg (1874-1951), inventeur du dodécaphonisme, écrit aussi un traité sur l'harmonie classique (1911) et Ivan Wyschnegradsky (1893-1979) formalise l'emploi de quarts de tons (1932). Alain Daniélou (1907-1994), étudie la musique indienne sur le terrain et publie un traité de musicologie (1959), Jacques Chailley (1910-1999) présente l'imbroglio des modes (1960) et Iannis Xenakis (1922-2001) introduit de nombreux modèles de la physique et des mathématiques dans la formalisation de l'écriture musicale ; un de ses ouvrages majeurs est publié en 1963.

Dans son article sur les gammes naturelles (1999), Yves Hellegouarch donne une formalisation mathématique de la notion de tempérament avec des éléments de théorie des groupes, également présente dans la thèse de Moreno Andreatta (2003). Thomas Hélie a développé avec ses collègues de l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique le « snail », un outil logiciel et matériel d'analyse et de visualisation du son (2016). Enfin, André Calvet propose (2020) une vaste fresque sur l'histoire de la musique et des tempéraments.

Suite à tous ces développements très érudits et subtils, il ne semble pas raisonnable de proposer une autre façon de structurer divers éléments de l'écriture de la musique avec un système formel. Pourtant, une façon assez simple de construire à la fois des notes et des gammes nous est apparue en 1999. Nous la reproduisons dans les paragraphes qui suivent à des variantes mineures près de présentation et de rédaction.

Nous nous donnons d'abord une toute première note de référence (paragraphe 1). À partir du premièr harmonique, de la quinte, une première gamme très primitive apparaît, avec seulement deux notes (paragraphe 2). Avec ces deux premières notes, la construction itérative de quintes au paragraphe 3 permet d'expliciter une suite infinie de notes, en retrouvant essentiellement la construction initiale de Pythagore. Repartant de la gamme à deux notes, de l'intervalle de quinte et de son intervalle complémentaire, la quarte, il est alors naturel de diviser la quinte par la quarte afin de faire apparaître une nouvelle gamme qui comporte trois notes (paragraphe 4).

On recommence alors le processus et l'on coupe le plus grand des deux intervalles d'une gamme à trois notes par le plus petit. On obtient au paragraphe 5 une famille de gammes à cinq notes. Nous présentons ensuite la construction récurrente non linéaire d'une famille infinie de gammes (paragraphe 6). À partir du principe de découpage en deux parties du plus grand des intervalles d'une gamme donnée par le plus petit, nous mettons en évidence quelques propriétés mathématiques au paragraphe 7 et tentons de mettre un peu d'ordre dans la multiplicité de choix possibles aux paragraphes 8 et 9. De façon incidente, nous trouvons que le nombre de notes de la famille de gammes qui suit les gammes pentatoniques n'est pas égal à 8, nombre suivant 5 dans la suite de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, *etc* et serait apparu avec un algorithme linéaire de découpage, mais égal à 7. Nous explicitons au dernier paragraphe les 21 gammes à sept notes qui commencent par la note de référence, avant une conclusion.

1) La note do

La musique est écrite avec des notes. Du point de vue de la modélisation acoustique, une **note** est une variation de pression au cours du temps caractérisée par une fenêtre temporelle qui définit la durée de la note et par une fréquence caractéristique de la « hauteur » du son. Du point de vue mathématique, une note est une fonction périodique du temps, de pulsation ω appelée abusivement dans la suite « fréquence ω », de période $T = 2\pi/\omega$ dupliquée quelques centaines de fois pour les fréquences sonores habituelles. Nous ne nous intéressons pas ici au timbre de l'instrument, c'est à dire au spectre du motif intérieur à la période, mais simplement à la fréquence de la note.

Pour nous, la première note est le *do*. Il s'agit d'une convention et le *do* représente ici une note de fréquence ω_0, avec ω_0 fixé pour toute la suite de cette contribution. Nous introduisons aussi l'instrument de musique le plus primitif, c'est à dire la corde vibrante de longueur L tenue à ses deux extrémités. Nous supposons que le *do* correspond au premier mode de vibration de cette corde, c'est à dire que ω_0 est la fréquence fondamentale de la corde de longueur L. Si une corde de longueur L vibre à la fréquence ω_0, son second harmonique vibre à la fréquence $2\,\omega_0$ et correspond à une longueur de $\frac{L}{2}$. le troisième vibre à la fréquence $3\,\omega_0$ et est associé à une longueur de $\frac{L}{3}$. De façon générale, pour n entier supérieur ou égal à 1, le n^{o} harmonique est de fréquence $n\,\omega_0$ (voir par exemple le livre de Laurent Schwartz, 1965) et correspond à une longueur de corde égale à $\frac{L}{n}$.

L'oreille humaine est sensible aux rapports de fréquence et deux notes de rapport de fréquences égal à deux sont dites à l'octave. L'octave et la fréquence $2\,\omega_0$ correspond au second harmonique pour la vibration d'une corde si la fréquence fondamentale est égale à ω_0. Par convention, nous appelons do^* la note de fréquence $2\,\omega_0$:

$$do^* \;:\; 2\,\omega_0\,.$$

Ensuite, il y a tous les autres « *do* ». Tous ces *do* sont multiples du précédent via une puissance de 2 en termes de fréquence, le do^* à l'octave, le suivant à deux octaves $(4\,\omega_0)$ etc... ou bien à l'octave plus grave $(\frac{1}{2}\,\omega_0)$, deux octaves $(\frac{1}{4}\,\omega_0)$, etc... Nous retenons que la note de référence de l'octave d'ordre k a une fréquence μ_k définie par

$$\mu_k = 2^k\,\omega_0\,, \qquad k \in \mathbb{Z}\,.$$

On étudie ensuite les autres notes et par convention on se place dans l'intervalle $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$, entre le *do* et le do^* : le *do* est la première note de l'intervalle $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$ et le do^* la dernière. On introduit la notation Ω_0 utile dans la suite :

$$do \;:\; \Omega_0 = \omega_0\,.$$

Dans le système classique qui remonte au moins à Pythagore et nous sert ici de référence, la note suivante est le *sol*. On génère le *sol* grâce au troisième harmonique, de fréquence $3\,\omega_0$, pour une corde de fréquence fondamentale associée à la note *do*. On ramène ensuite cette nouvelle note dans l'octave de référence $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$ par division de la fréquence par deux, une transformation du boulanger multiplicative (voir par exemple l'ouvrage de Vladimir Arnold et André Avez, 1967). Le *sol* définit la notation Ω_1, de fréquence égale à $\frac{3}{2}\,\omega_0$:

$$sol \;:\; \Omega_1 = \frac{3}{2}\,\omega_0 \,.$$

2) Gammes à deux notes

Une **gamme** est l'ensemble des notes disponibles pour écrire un morceau de musique, c'est à dire par convention l'ensemble des fréquences ν_j utilisables à partir de la fréquence fondamentale ω_0 jusqu'au second harmonique $2\,\omega_0$:

$$\omega_0 \;\leq\; \nu_j \;<\; 2\,\omega_0 \,.$$

Une gamme contient p notes si l'indice entier j prend les valeurs $j = 0,\, 1,\, 2, \ldots,\, p-1$. On ordonne alors les fréquences ν_j en ordre croissant :

$$\omega_0 = \nu_0 \,<\, \nu_1 \,<\, \nu_2 \,<\, \cdots \,<\, \nu_j \,<\, \nu_{j+1} \,<\, \cdots \,<\, \nu_{p-1} \,<\, 2\omega_0. \tag{1}$$

Nous proposons dans ce qui suit une structure pour décrire une famille de gammes « naturelles ». Nous commençons avec les trois notes dont nous disposons : le *do*, le *sol* et le *do**. On fabrique ainsi une gamme « primitive » à deux notes

$$\mathcal{D}_1 = \big\{ do,\; sol,\; do^* \big\} \,. \tag{2}$$

L'intervalle $sol\,/\,do \;=\; \frac{3}{2}$ définit une **quinte pure** et le second intervalle (plus petit) $do^*/sol \;=\; \frac{2}{3/2} \;=\; \frac{4}{3}$ une **quarte pure**. Il n'y a aucune raison pour réduire une gamme primitive de deux notes à l'unique choix $\mathcal{D}_1$ proposé à la relation (2) c'est à dire une quinte suivie d'une quarte. On peut faire aussi le contraire, c'est à dire une quarte suivie d'une quinte. Ce faisant, on définit ainsi à la fois une nouvelle note et une nouvelle gamme. La nouvelle note, le *fa*, de fréquence Ω_{-1} est issue de ω_0 par une quarte pure, ce qui s'écrit par définition :

$$fa \;:\; \Omega_{-1} = \frac{4}{3}\,\omega_0 \approx 1.333333\;\omega_0 \,.$$

La seconde gamme primitive correspond donc à la séquence *do*, *fa*, *do** :

$$\mathcal{D}_2 = \big\{ do,\; fa,\; do^* \big\} \,. \tag{3}$$

Nous disposons de deux **structures multiplicatives** pour les gammes primitives : la gamme $\mathcal{D}_1$ avec (dans cet ordre), quinte et quarte et la gamme $\mathcal{D}_2$ avec une quarte quivie d'une quinte. Mais une gamme, même primitive, doit-elle commencer par la note *do* ? La pratique de la musique montre qu'il n'en est rien. Nous nous livrons donc dans le paragraphe qui suit à la recherche d'une gamme ayant la même « structure » que la gamme $\mathcal{D}_1$ et qui commence par un *sol*. La structure de la gamme $\mathcal{D}_1$ est par définition la suite des intervalles multiplicatifs entre les notes de la gamme, ici (quinte, quarte) $=\big(\frac{3}{2},\,\frac{4}{3}\big)$. Nous retenons le relation

$$\text{structure multiplicative}\,\big(\mathcal{D}_1\big) = \Big(\frac{3}{2}\,,\,\frac{4}{3}\Big)\,. \tag{4}$$

Nous fabriquons la gamme $\mathcal{D}_1$ qui commence par un *sol* en posant $\nu_0 = \Omega_1$ au lieu de $\nu_0 = \omega_0$ de la relation (1), ce qui consiste « à changer le *do* en *sol* », ou à changer la fréquence de référence pour la première note de cette gamme. La nouvelle gamme a la même structure multiplicative que la gamme $\mathcal{D}_1$ et commence par un *sol*. Nous la notons $\mathcal{D}_1(\Omega_1)$ et elle consiste en la succession suivante de fréquences :

$$\mathcal{D}_1(\Omega_1) = \big\{\Omega_1,\,\frac{3}{2}\,\Omega_1,\,2\,\Omega_1\big\}\,. \tag{5}$$

La note intermédiaire de fréquence $\frac{3}{2}\,\Omega_1$ entre le *sol* et son harmonique $sol^* = 2\,\Omega_1$ est par définition le *ré** de fréquence $\frac{9}{4}\,\omega_0$. Comme $\frac{9}{4}$ n'appartient pas à l'intervalle $[1,\,2]$ mais à l'intervalle $[2,\,4]$, on ramène le *ré** dans l'intervalle $[\omega_0,\,2\omega_0]$ en divisant sa fréquence par deux. On définit ainsi le *ré*, de fréquence $\Omega_2 = \frac{9}{8}\,\omega_0$:

$$\textit{ré}\ :\ \Omega_2 = \frac{9}{8}\,\omega_0 = \frac{3^2}{2^3}\,\omega_0 = 1.125\ \omega_0\ . \tag{6}$$

La gamme de même structure que $\mathcal{D}_1$ et qui commence par la note *sol*, soit $\mathcal{D}_1(\Omega_1)$ s'écrit finalement, compte tenu de (5) et (6) :

$$\mathcal{D}_1(\Omega_1) = \big\{\Omega_1,\,2\,\Omega_2,\,2\,\Omega_1\big\}\,. \tag{7}$$

3) Suite infinie des notes

Nous poursuivons l'idée de changer de fréquence de référence, mais à partir du *ré* au lieu du *sol* lors de l'étude précédente. Compte tenu des relations (4) et (7), la gamme $\mathcal{D}_1(\Omega_2) = \big\{\Omega_2,\,\frac{3}{2}\,\Omega_2,\,2\,\Omega_2\big\}$ définit une nouvelle note de fréquence $\Omega_3 = \frac{3}{2}\,\Omega_2 = \frac{27}{16}\,\omega_0$, qui appartient à l'intervalle $[\,\omega_0,\,2\,\omega_0\,]$; c'est le *la*.

$$la\ :\ \Omega_3 = \frac{27}{16}\,\omega_0 = \frac{3^3}{2^4}\,\omega_0 = 1.6875\,\omega_0\,.$$

On poursuit maintenant la construction précédente à l'infini. La gamme $\mathcal{D}_1(\Omega_k)$ a la même structure multiplicative que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_1(\Omega_0)$ de relation (4) et commence par la note Ω_k : elle est de la forme $\mathcal{D}_1(\Omega_k) = \{\Omega_k,\,\frac{3}{2}\,\Omega_k,\,2\,\Omega_k\,\}$. Si $\frac{3}{2}\,\Omega_k \leq 2\,\omega_0$, on pose $\Omega_{k+1} = \frac{3}{2}\,\Omega_k$ et dans le cas contraire où $2\,\omega_0 < \frac{3}{2}\,\Omega_k < 4\,\omega_0$, on définit la note Ω_{k+1} par la relation $\Omega_{k+1} = \frac{3}{4}\,\Omega_k$. De cette façon, on construit une infinité de notes de fréquence Ω_k (k entier supérieur ou égal à 1) donnée par une expression algébrique de la forme $3^k\,\omega_0/2^{l(k)}$, laquelle appartient par définition à l'intervalle $[\,\omega_0,\,2\,\omega_0\,]$. Pour créer la note Ω_k, on commence donc par construire k quintes successives à partir du *do* puis par mise à l'octave, on amène cette note dans l'intervalle de référence

$$\Omega_k = \frac{3^k}{2^{l(k)}}\,\omega_0, \qquad \Omega_k \in [\,\omega_0,\,2\,\omega_0\,]\,. \tag{8}$$

Notons bien que l'entier $l(k)$ est défini par la condition (8). On peut encore écrire $1 \leq \frac{3^k}{2^{l(k)}} < 2$ ou encore de façon équivalente $l(k) \log 2 \leq k \log 3 < \big(l(k)+1\big) \log 2$. Donc l'entier $l(k)$ est la partie entière de $k \log 3/\log 2$:

$$l(k) \leq k \frac{\log 3}{\log 2} < l(k) + 1 \; ; \quad l(k) = E\Big(k \frac{\log 3}{\log 2}\Big) . \tag{9}$$

Nous pouvons regarder les premières notes ainsi construites au sein du tableau suivant.

numéro de la note	nom de la note	$\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$	valeur approchée
4	*mi*	$3^4/2^6$	1.265625
5	*si*	$3^5/2^7$	1.898437
6	*fa* ♯	$3^6/2^9$	1.423828
7	*do* ♯	$3^7/2^{11}$	1.067871
8	*sol* ♯	$3^8/2^{12}$	1.601806
9	*ré* ♯	$3^9/2^{14}$	1.201355
10	*la* ♯	$3^{10}/2^{15}$	1.802032
11	*mi* ♯	$3^{11}/2^{17}$	1.351524
12	*si* ♯	$3^{12}/2^{19}$	1.013643

On observe que les deux dernières notes sont confondues dans la musique classique occidentale avec le *fa* et le *do* puisque d'une part $(\Omega_{11}/\omega_0 \approx 1.351524$ alors que $\Omega_{-1}/\omega_0 \approx 1.333333$ et d'autre part $\Omega_{12}/\omega_0 \approx 1.013643$ alors que $\Omega_0/\omega_0 = 1$.

La gamme $\mathcal{D}_1(\Omega_6)$ par exemple est égale à $\{\Omega_6,\, 2\Omega_7,\, 2\Omega_6\} = \{fa\sharp,\, do\sharp^*,\, fa\sharp^*\}$ (avec des notations naturelles). De manière générale, on a

$$\mathcal{D}_1(\Omega_k) = \big\{\Omega_k,\, (\Omega_{k+1} \text{ ou } 2\,\Omega_{k+1}),\, 2\Omega_k\big\} .$$

Le choix Ω_{k+1} comme seconde note de la gamme $\mathcal{D}_1(\Omega_k)$ a lieu lorsque $\Omega_{k+1} > \Omega_k$ et le choix $2\,\Omega_{k+1}$ correspond au cas de figure $\Omega_{k+1} < \Omega_k$ et dans ce cas $2\,\Omega_{k+1} > 2\,\omega_0 > \Omega_k$.

Mais il manque encore des notes à notre catalogue. Nous repartons de la gamme primitive de deux notes $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_2(\Omega_0) = \{do,\, fa,\, do^*\}$ (relation (3)). On a aussi $\mathcal{D}_2(\Omega_0) = \{\Omega_0,\, \Omega_{-1},\, 2\,\Omega_0\}$. Au lieu de faire commencer la première note de ce type de gamme par un *do*, on peut la faire commencer par un *fa*. On définit pour cela la structure multiplicative de $\mathcal{D}_2$ à savoir une quarte puis une quinte :

$$\text{structure multiplicative}\,\big(\mathcal{D}_2\big) = \Big(\frac{4}{3},\, \frac{3}{2}\Big) .$$

La note qui suit Ω_{-1} dans la gamme $\mathcal{D}_2(\Omega_{-1})$ est $\Omega_{-2} = \frac{4}{3}\,\Omega_{-1}$: c'est le *si* bémol ou *si*♭ :

$$si\,\flat \;:\; \Omega_{-2} = \frac{16}{9}\,\omega_0 = \frac{2^4}{3^2}\,\omega_0 \approx 1.777778\,\omega_0$$

et

$$\mathcal{D}_2(\Omega_{-1}) = \big\{fa,\, si\,\flat,\, fa^*\big\} = \big\{\Omega_{-1},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_{-1}\big\} .$$

La construction de nouvelles notes entraîne celle de nouvelles gammes et réciproquement les nouvelles gammes $\mathcal{D}_2(\Omega_{-k})$ permettent d'introduire de nouvelles notes $\Omega_{-(k+1)}$. L'algorithme se poursuit avec les quartes comme avec les quintes. La note Ω_{-k} (k entier supérieur ou égal à un) est issue de la note fondamentale *do* par une succession de k quartes ensuite ramenées dans l'intervalle $[\omega_0,\, 2\,\omega_0\,[$ à l'aide d'une division par la puissance de 2 qui convient. La note Ω_{-k} est de la forme $2^{-l(-k)}\,\omega_0/3^k$ ce qui revient à généraliser la relation (8) aux entiers k négatifs et la relation (9) s'applique encore.

Les nouvelles notes d'indice négatif sont aussi utiles que celles d'indice positif. Nous présentons les premières dans un tableau.

numéro de la note	nom de la note	$\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$	valeur approchée
-3	*mi*$\flat$	$2^5/3^3$	1.185185
-4	*la*$\flat$	$2^7/3^4$	1.580247
-5	*ré*$\flat$	$2^8/3^5$	1.053498
-6	*sol*$\flat$	$2^{10}/3^6$	1.404664
-7	*do*$\flat$	$2^{12}/3^7$	1.872885
-8	*fa*$\flat$	$2^{13}/3^8$	1.248590

Les deux dernières notes de cette suite, à savoir *do*$\flat$ et *fa*$\flat$ sont éliminées classiquement au profit des notes *si* et *mi*. En effet, on a d'une part $\Omega_{-7}/\omega_0 \approx 1.872885$ alors que $\Omega_5/\omega_0 \approx 1.898437$ et d'autre part $\Omega_{-8}/\omega_0 \approx 1.248590$ se confronte à $\Omega_4/\omega_0 \approx 1.265625$.

On remarque que pour $k \in \{-1,\, \cdots,\, 5\}$, on a

$$\Omega_k\,\sharp = \Omega_{k+7} \quad \text{et} \quad \Omega_k\,\flat = \Omega_{k-7}\,.$$

Il est donc naturel de poser ici

$$\Omega_k\,\sharp\sharp = \Omega_{k+14} \quad \text{et} \quad \Omega_k\,\flat\flat = \Omega_{k-14} \qquad \text{pour} \ -1 \leq k \leq 5\,.$$

Ces relations fournissent en pratique 14 nouvelles notes de musique :

numéro de la note	nom de la note	$\Omega_{\text{numéro}}/\omega_0$	valeur approchée
13	*fa*$\sharp\sharp$	$3^{13}/2^{20}$	1.520465
14	*do*$\sharp\sharp$	$3^{14}/2^{22}$	1.140349
15	*sol*$\sharp\sharp$	$3^{15}/2^{23}$	1.710523
16	*ré*$\sharp\sharp$	$3^{16}/2^{25}$	1.282892
17	*la*$\sharp\sharp$	$3^{17}/2^{26}$	1.924338
18	*mi*$\sharp\sharp$	$3^{18}/2^{28}$	1.443254
19	*si*$\sharp\sharp$	$3^{19}/2^{30}$	1.082440
-9	*si*$\flat\flat$	$2^{15}/3^9$	1.664787
-10	*mi*$\flat\flat$	$2^{16}/3^{10}$	1.109858
-11	*la*$\flat\flat$	$2^{18}/3^{11}$	1.479810
-12	*ré*$\flat\flat$	$2^{20}/3^{12}$	1.973081
-13	*sol*$\flat\flat$	$2^{21}/3^{13}$	1.315387
-14	*do*$\flat\flat$	$2^{23}/3^{14}$	1.753849
-15	*fa*$\flat\flat$	$2^{24}/3^{115}$	1.169233

Quand on range les notes Ω_{-15} à Ω_{19} par fréquences croissantes et non plus par puissances de 3 croissantes, on trouve

$$\left\{\begin{array}{l} do < si\sharp < ré\flat < do\sharp < si\sharp\sharp < mi\flat\flat < ré \\ ré < do\sharp\sharp < fa\flat\flat < mi\flat < ré\sharp < fa\flat < mi \\ mi < ré\sharp\sharp < sol\flat\flat < fa \\ fa < mi\sharp < sol\flat < fa\sharp < mi\sharp\sharp < la\flat\flat < sol \\ sol < fa\sharp\sharp < la\flat < sol\sharp < si\flat\flat < la \\ la < sol\sharp\sharp < do\flat\flat < si\flat < la\sharp < do\flat < si \\ si < la\sharp\sharp < ré\flat\flat < do^* . \end{array}\right.$$

4) Gammes à trois notes

Pour composer une musique très primitive, nous disposons des deux gammes à deux notes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Comme nous avons construit toute la famille de notes $\left(\Omega_k\right)_{k\in\mathbb{Z}}$, nous disposons aussi des gammes $\mathcal{D}_1(\Omega_k)$ et $\mathcal{D}_2(\Omega_k)$ $(k \in \mathbb{Z})$. Toutefois, on peut avoir envie de construire des gammes avec plus de deux notes. Nous proposons dans la suite le procédé récursif de « brisure des tons ». Nous introduisons une nouvelle notation pour les gammes à deux notes et nous posons

$$\mathcal{G}_i^1 = \mathcal{D}_i(\Omega_0) \qquad \text{pour } i = 1,\, 2\,.$$

Les gammes à deux notes forment la première famille des gammes.

Nous définissons le *ton* des gammes à deux notes et nous le notons θ_1 ; il s'agit d'une quinte pure, comme proposé au paragraphe 2. Nous avons

$$\theta_1 = \frac{3}{2}\,.$$

Le demi-ton des gammes à deux notes, noté δ_1, est par définition une quarte pure :

$$\delta_1 = \frac{4}{3}\,.$$

Nous cherchons à former une nouvelle gamme issue d'une gamme à deux notes et telle que le rapport de fréquences de deux notes successives ν_{j+1} / ν_j arbitraires vaille soit un ton θ_2 de la nouvelle gamme, soit un demi-ton δ_2 de celle ci :

$$\frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} \in \{\theta_2,\, \delta_2\}\,.$$

Nous généralisons pour les nouvelles gammes ce qui existe pour la gamme à deux notes $\mathcal{D}_1$:

$$\frac{sol}{do},\, \frac{do^*}{sol} \in \{\theta_1,\, \delta_1\}\,.$$

Nous brisons multiplicativement le ton θ_1 à l'aide du demi-ton δ_1 et formons ainsi un nouveau ton avec le demi-ton précédent :

$$\theta_2 = \delta_1 = \frac{4}{3}$$

et un nouveau demi-ton avec le rapport de fréquences restant, c'est à dire le rapport de l'ancien ton sur le nouveau ton :

$$\delta_2 = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\theta_1}{\delta_1} = \frac{9}{8} = \frac{3^2}{2^3}\,.$$

En procédant de cette manière, le ton primitif (une quite pure !) est brisé en un nouveau ton (une quarte pure) et un nouveau demi-ton δ_2 qu'on appelle classiquement une **seconde**.

La gamme $\mathcal{G}_1^1 \equiv \mathcal{D}_1$ donne naissance par brisure de son unique ton à deux gammes $\mathcal{G}_1^2$ et $\mathcal{G}_2^2$ selon la façon dont la quinte *sol*/*do* est découpée en « un demi-ton plus un ton ». Dans le premier cas, on a $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \delta_2 = \frac{9}{8}$, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_2 = \frac{4}{3}$, $\frac{\nu_3}{\nu_2} = \theta_2 = \frac{4}{3}$; on vient de créer une gamme à trois notes qui comporte deux tons θ_2 (une quarte pure) et un demi-ton δ_2 (une seconde) :

$$\mathcal{G}_1^2 = \big\{ do,\ ré,\ sol,\ do^* \big\} = \big\{ \Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_1,\, 2\,\Omega_0 \big\}\,.$$

La seconde gamme à trois notes $\mathcal{G}_2^2$ est issue de la gamme $\mathcal{G}_1^1$, ce qui signifie que toutes les notes de la gamme $\mathcal{G}_2^2$ sont également des notes de la gamme $\mathcal{G}_1^1$. On débute cette gamme par un ton : $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \theta_2 = \frac{4}{3}$, puis on la continue par un demi-ton : $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_2 = \frac{9}{8}$ pour la terminer par un ton : $\frac{\nu_3}{\nu_2} = \theta_2 = \frac{4}{3}$. Le dernier ton de l'ancienne gamme devient le demi-ton de la nouvelle. La gamme $\mathcal{G}_2^2$ est finalement donnée par la suite

$$\mathcal{G}_2^2 = \big\{ do,\ fa,\ sol,\ do^* \big\} = \big\{ \Omega_0,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, 2\,\Omega_0 \big\}\,. \tag{10}$$

Mais la gamme $\mathcal{G}_1^2 \equiv \mathcal{D}_2$ (relation (3)) peut elle-aussi servir de point de départ à deux nouvelles gammes à trois notes : on coupe le ton $\theta_1 = do^*/fa$ en un demi-ton δ_2 suivi d'un ton θ_2 ou bien en un ton θ_2 suivi d'un demi-ton δ_2. Dans le premier cas, on obtient à nouveau la gamme $\mathcal{G}_2^2$ (exercice laissé au lecteur !) et dans le second, on a $\frac{\nu_1}{\nu_0} = \theta_2 = \frac{4}{3}$, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_2 = \frac{4}{3}$, $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_2 = \frac{9}{8}$. La note *si* bémol est utile pour fabriquer $\mathcal{G}_3^2$:

$$\mathcal{G}_3^2 = \big\{ do,\ fa,\ si\,\flat,\ do^* \big\} = \big\{ \Omega_0,\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0 \big\}\,. \tag{11}$$

Nous retenons la structure multiplicative des trois gammes $\mathcal{G}_i^2$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{structure multiplicative}\,\big(\mathcal{G}_1^2\big) = \big(\delta_2,\, \theta_2,\, \theta_2\big) = \big(\frac{9}{8},\, \frac{4}{3},\, \frac{4}{3}\big) \\ \text{structure multiplicative}\,\big(\mathcal{G}_2^2\big) = \big(\theta_2,\, \delta_2,\, \theta_2\big) = \big(\frac{4}{3},\, \frac{9}{8},\, \frac{4}{3}\big) \\ \text{structure multiplicative}\,\big(\mathcal{G}_3^2\big) = \big(\theta_2,\, \theta_2,\, \delta_2\big) = \big(\frac{4}{3},\, \frac{4}{3},\, \frac{9}{8}\big)\,. \end{array} \right. \tag{12}$$

5) Gammes à cinq notes

Nous poursuivons le procédé de brisure de ton pour construire de nouvelles gammes : nous découpons le ton $\theta_2 = \frac{4}{3}$ en un nouveau ton θ_3 et un demi-ton δ_3 de sorte que

$$\theta_3\ \delta_3 = \theta_2$$

et a priori si on procède comme pour les gammes à trois notes, $\theta_3 = \delta_2 = \frac{9}{8}$. On obtient ainsi un nouveau « demi-ton » $\delta_3 = \theta_2/\theta_3 = \frac{4/3}{9/8} = \frac{32}{27} = \frac{2^5}{3^3}$. Mais les valeurs numériques sont cruelles : on trouve $\theta_3 = \frac{9}{8} = 1.125$ et $\delta_3 = \frac{32}{27} \approx 1.1852$ qui est supérieur strictement à θ_3 ! Nous venons de former un ton qui est plus petit que le demi-ton qui lui est associé. On décide donc d'échanger les rôles du ton et du demi-ton, d'accepter un algorithme de construction non linéaire et l'on a

$$\delta_3 = \delta_2 = \frac{3^2}{2^3} \quad \text{et} \quad \theta_3 = \frac{\theta_2}{\delta_3} = \frac{\theta_2}{\delta_2} = \frac{2^5}{3^3}\,.$$

On poursuit ensuite le procédé de brisure des deux tons des gammes $\mathcal{G}_i^2$ $(i = 1,\, 2,\, 3)$ pour former la troisième famille de gammes $\mathcal{G}_j^3$, à cinq notes.

Les gammes à cinq notes ont toutes deux tons et trois demi-tons :

$$T_3 = 2, \qquad D_3 = 3$$

alors que les gammes à deux notes ont toutes un ton et un demi-ton :

$$T_1 = 1, \qquad D_1 = 1$$

et les gammes à trois notes ont deux tons et un demi-ton :

$$T_2 = 2, \qquad D_2 = 1\,.$$

Il y a quatre façons de briser les deux tons de la gamme $\mathcal{G}_1^2$: le premier demi ton $ré/do = \frac{\nu_1}{\nu_0}$ est toujours un demi-ton $\delta_3 = \delta_2$. Si on décide que $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \delta_3$, on va introduire la note *mi*. De même, si on casse le second ton θ_2 en commençant par un demi-ton δ_3, on utilise le *la* de fréquence Ω_3. La gamme $\mathcal{G}_1^3$ à cinq notes ainsi obtenue s'écrit :

$$\mathcal{G}_1^3 = \big\{ do,\, ré,\, mi,\, sol,\, la,\, do^* \big\} \;=\; \big\{ \Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0 \big\}\,.$$

Si on brise le premier ton $sol/ré = \theta_2$ de la gamme $\mathcal{G}_1^2$ en commençant par un ton θ_3, on retrouve la relation $\frac{\nu_2}{\nu_1} = \theta_3 = \frac{32}{27}$, soit $\frac{\nu_2}{\omega_0} = \frac{9}{9}\,\frac{32}{27} = \frac{4}{3} = \frac{\Omega_{-1}}{\omega_0}$, ce qui introduit à nouveau le *fa*. De même, si on brise le second ton do^*/sol de la gamme $\mathcal{G}_1^2$ en commençant par un ton nouveau, on a $\frac{\nu_4}{\nu_3} = \theta_3$ donc $\frac{\nu_4}{\omega_0} = \frac{3}{2}\,\frac{32}{27} = \frac{8}{9} = \frac{\Omega_{-2}}{\omega_0}$ et on reconnaît le *si*$\flat$. Les trois autres gammes à cinq notes issues de $\mathcal{G}_1^2$ s'en déduisent aisément :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_2^3 = \big\{ do,\, ré,\, fa,\, sol,\, la,\, do^* \big\} \;=\; \big\{ \Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0 \big\} \\ \mathcal{G}_3^3 = \big\{ do,\, ré,\, fa,\, sol,\, si\,\flat,\, do^* \big\} \;=\; \big\{ \Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0 \big\} \\ \mathcal{G}_4^3 = \big\{ do,\, ré,\, mi,\, sol,\, si\,\flat,\, do^* \big\} \;=\; \big\{ \Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_1,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0 \big\}\,. \end{array} \right.$$

Combien y a-t-il de gammes à cinq notes ? Autant que de façons de placer arbitrairement les deux $(= T_3)$ tons θ_3 et les trois $(= D_3)$ demi-tons δ_3 parmi cinq objets, puisque

$$\theta_3^{T_3}\;\delta_3^{D_3} = \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^2 \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^2 = 2\,.$$

On compte par conséquent un total de $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$ gammes à cinq notes qui débutent par la note *do*.

Examinons les gammes nouvelles issues de la brisure de la gamme $\mathcal{G}_2^2$ (relation (10)) où les deux tons θ_2 sont aux extrémités. Si on commence par un demi-ton δ_3, on a $\frac{\nu_1}{\omega_0} = \delta_3 = \frac{9}{8} = \frac{\Omega_2}{\omega_0}$ et on retrouve le *ré* comme première note alors que si on commence par un ton θ_3, on obtient $\frac{\nu_1}{\omega_0} = \theta_3 = \frac{2^5}{3^3} = \frac{\Omega_{-3}}{\omega_0}$ et le *mi*$\flat$ doit être utilisé ici. De même si on brise le second ton do^*/sol de la gamme $\mathcal{G}_2^2$ en commençant par un demi-ton δ_3, on retrouve le *la*, alors que si on commence par un ton θ_3, on doit utiliser le *si*$\flat$: c'est analogue à la brisure du second ton de la gamme $\mathcal{G}_1^2$. Nous l'avons déjà vu ! On dispose maintenant de deux nouvelles gammes à cinq notes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_5^3 = \big\{ do,\, mi\flat,\, fa,\, sol,\, la,\, do^* \big\} \;=\; \big\{ \Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0 \big\} \\ \mathcal{G}_6^3 = \big\{ do,\, mi\flat,\, fa,\, sol,\, si\,\flat,\, do^* \big\} = \big\{ \Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_1,\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0 \big\}\,. \end{array} \right.$$

Nous continuons avec les gammes à cinq notes issues de la gamme $\mathcal{G}_3^2$ (relation (11)) qui a ses deux tons θ_2 au début. Pour briser le premier ton, le processus est analogue à la gamme $\mathcal{G}_2^2$ et pour briser le second ton $si\,\flat/fa$, on peut commencer par un demi-ton δ_3 et on obtient un *sol* et par conséquent une gamme déjà construite ($\mathcal{G}_3^3$ ou $\mathcal{G}_6^3$) ou bien on commence par un ton θ_3 et on a alors $\frac{\nu_4}{\nu_3} = \theta_3 = \frac{32}{27}$, donc $\frac{\nu_4}{\omega_0} = \frac{4}{3}\,\frac{32}{27} = \frac{64}{81} = \frac{2^7}{3^4} = \frac{\Omega_{-4}}{\omega_0}$; on on ne coupera pas au $la\,\flat$ cette fois. On a en définitive :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_7^3 = \big\{ do,\ ré,\ fa,\ la\flat,\ si\,\flat,\ do^* \big\} = \big\{ \Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0 \big\} \\ \mathcal{G}_8^3 = \big\{ do,\ mi\flat,\ fa,\ la\flat,\ si\,\flat,\ do^* \big\} = \big\{ \Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-1},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0 \big\} \,. \end{array} \right.$$

Le décompte des gammes comportant cinq notes n'est pas complet. Les huit gammes déjà vues sont issues des trois gammes à trois notes. Nous détaillons dans le tableau qui suit la succession des deux tons et des trois demi-tons, c'est à dire la structure multiplicative de ces huit gammes.

nom de la gamme	alternance des tons et des demi-tons	valeurs numériques
$\mathcal{G}_1^3$	$\delta_3,\ \delta_3,\ \theta_3,\ \delta_3,\ \theta_3$	$\frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{9}{8},\ \frac{32}{27}$
$\mathcal{G}_2^3$	$\delta_3,\ \theta_3,\ \delta_3,\ \delta_3,\ \theta_3$	$\frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{32}{27}$
$\mathcal{G}_3^3$	$\delta_3,\ \theta_3,\ \delta_3,\ \theta_3,\ \delta_3$	$\frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{9}{8}$
$\mathcal{G}_4^3$	$\delta_3,\ \delta_3,\ \theta_3,\ \theta_3,\ \delta_3$	$\frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{32}{27},\ \frac{9}{8}$
$\mathcal{G}_5^3$	$\theta_3,\ \delta_3,\ \delta_3,\ \delta_3,\ \theta_3$	$\frac{32}{27},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{32}{27}$
$\mathcal{G}_6^3$	$\theta_3,\ \delta_3,\ \delta_3,\ \theta_3,\ \delta_3$	$\frac{32}{27},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{9}{8}$
$\mathcal{G}_7^3$	$\delta_3,\ \theta_3,\ \theta_3,\ \delta_3,\ \delta_3$	$\frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{32}{27},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8}$
$\mathcal{G}_8^3$	$\theta_3,\ \delta_3,\ \theta_3,\ \delta_3,\ \delta_3$	$\frac{32}{27},\ \frac{9}{8},\ \frac{32}{27},\ \frac{9}{8},\ \frac{9}{8}$

Il manque clairement deux gammes qui ne sont pas issues de gammes à trois notes, mais qu'on peut construire simplement en complétant les structures multiplicatives précédentes. On trouve ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_9^3\ :\ \big(\delta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \theta_3,\, \theta_3\big) = \Big(\frac{32}{27},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8}\Big) \\ \mathcal{G}_{10}^3\ :\ \big(\theta_3,\, \theta_3,\, \delta_3,\, \delta_3,\, \delta_3\big) = \Big(\frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{32}{27}\Big) \,. \end{array} \right. \qquad (13)$$

Les successions de notes des deux gammes de structures décrites à la relation (13) qui commencent par un *do* sont faciles à calculer. Nous y rencontrons le *sol* bémol (Ω_{-6}) et le *fa* dièse (ou Ω_6) à nouveau :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{G}_9^3 = \big\{ do,\ mi\,\flat,\ sol\,\flat,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \big\} = \big\{ \Omega_0,\, \Omega_{-3},\, \Omega_{-6},\, \Omega_{-4},\, \Omega_{-2},\, 2\,\Omega_0 \big\} \\ \mathcal{G}_{10}^3 = \big\{ do,\ ré,\ mi,\ fa\,\sharp,\ la,\ do^* \big\} = \big\{ \Omega_0,\, \Omega_2,\, \Omega_4,\, \Omega_6,\, \Omega_3,\, 2\,\Omega_0 \big\} \,. \end{array} \right.$$

6) Construction récurrente

Nous proposons maintenant un algorithme très simple pour passer des gammes de génération k (avec une notation générique $\mathcal{G}_\star^k$) aux gammes de génération $k{+}1$. Une gamme $\mathcal{G}_\star^k$ contient T_k tons et D_k demi-tons, de valeurs respectives θ_k et δ_k. L'ensemble des notes construites permettent de recouvrir l'octave de base $[\,\omega_0,\, 2\,\omega_0\,]$, et on en déduit simplement :

$$\theta_k^{T_k}\ \delta_k^{D_k} = 2\,. \qquad (14)$$

On appelle p_k le nombre de notes d'une gamme de la $k^{\text{ième}}$ famille et l'on a :

(15) $$p_k = T_k \,+\, D_k \,.$$

Notre construction consiste toujours à couper le ton θ_k en un nouveau ton θ_{k+1} « plus » un nouveau demi-ton δ_{k+1} avec l'un des deux morceaux égal au demi-ton δ_k :

(16) $$\theta_{k+1} \; \delta_{k+1} = \theta_k \,.$$

On choisit de garder comme nouveau ton le demi-ton δ_k si $\frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k$ ou bien on pose $\theta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$ dans le cas contraire, échappant de ce fait à la suite de Fibonacci (voir par exemple Michel Demazure, 1997) :

(17) $$\theta_{k+1} = \begin{cases} \delta_k & \text{si} \quad \frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k \\ \frac{\theta_k}{\delta_k} & \text{si} \quad \frac{\theta_k}{\delta_k} > \delta_k \,. \end{cases}$$

Le demi-ton complémentaire δ_{k+1} est issu simplement des relations (6.3) et (17) :

(18) $$\delta_{k+1} = \begin{cases} \frac{\theta_k}{\delta_k} & \text{si} \quad \frac{\theta_k}{\delta_k} < \delta_k \\ \delta_k & \text{si} \quad \frac{\theta_k}{\delta_k} > \delta_k \,. \end{cases}$$

Le nombre T_{k+1} de nouveaux tons dépend du cas de figure. On a $T_{k+1} = T_k + D_k$ si les anciens demi-tons δ_k deviennent des nouveaux tons θ_{k+1} ou alors $T_{k+1} = T_k$ dans le cas contraire où l'on conserve les demi-tons. De manière analogue, le nombre D_{k+1} de nouveaux demi-tons vaut $D_{k+1} = T_k$ dans le premier cas et $D_{k+1} = T_k + D_k$ dans le second :

(19) $$T_{k+1} = \begin{cases} T_k + D_k & \text{si} \quad \theta_k < {\delta_k}^2 \\ T_k & \text{si} \quad \theta_k > {\delta_k}^2 \end{cases}$$

(20) $$D_{k+1} = \begin{cases} T_k & \text{si} \quad \theta_k < {\delta_k}^2 \\ T_k \,+\, D_k & \text{si} \quad \theta_k > {\delta_k}^2 \,. \end{cases}$$

La relation (14) s'étend clairement à l'ordre $k+1$ ainsi que la relation (15) qui prend aussi la forme :

(21) $$p_{k+1} = p_k \,+\, T_k \,.$$

On peut recommencer à l'ordre suivant ! Le nombre N_k de gammes $\mathcal{G}_\star^k$ avec p_k notes et T_k tons est simplement égal au nombre de façons d'agencer T_k tons et D_k demi-tons, soit le nombre N_k de combinaisons :

(22) $$N_k = \binom{p_k}{T_k} = \binom{p_k}{D_k} = \frac{p_k!}{T_k!\, D_k!} \,.$$

Rappelons que la relation de récurrence débute avec les gammes ne comportant que deux notes :

(23) $$p_1 = 2, \quad T_1 = 1, \quad D_1 = 1, \quad \theta_1 = \frac{3}{2} = 1.5, \quad \delta_1 = \frac{4}{3} \approx 1.333333, \quad N_1 = 2,$$

qu'elle se poursuit avec les gammes à trois notes

$$p_2 = 3, \quad T_2 = 2, \quad D_2 = 1, \quad \theta_2 = \frac{4}{3} \approx 1.333333, \quad \delta_2 = \frac{9}{8} = 1.125, \quad N_2 = 3$$

et qu'on vient de mettre en évidence toutes les gammes de troisième génération à cinq notes :

$$p_3 = 5, \quad T_3 = 2, \quad D_3 = 3, \quad \theta_3 = \frac{2^5}{3^3} \approx 1.185185, \quad \delta_3 = \frac{9}{8} = 1.125, \quad N_3 = 10\,.$$

Les gammes de quatrième génération comporte sept notes :

$$p_4 = 7, \quad T_4 = 5, \quad D_4 = 2, \quad \theta_4 = \frac{3^2}{2^3} = 1.125, \quad \delta_4 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad N_4 = 21$$

et contiennent toutes les gammes de la musique classique occidentale, plus quelques autres moins utilisées. Nous y reviendrons. Notons que la suite de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, *etc.* aurait donné huit notes et non sept. Voilà pourquoi la gamme a sept notes ! Nous continuons pour le moment avec les gammes comprenant un nombre de notes plus important :

$$p_5 = 12, \quad T_5 = 5, \quad D_5 = 7, \quad \theta_5 = \frac{3^7}{2^{11}} \approx 1.067871, \quad \delta_5 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad N_5 = 792.$$

Le faible écart entre le ton $\theta_5 \approx 1.0678711$ et le demi-ton $\delta_5 \approx 1.053498$ puisque $\frac{\theta_5}{\delta_5} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643$ pose la question de sa perception et motive la gamme tempérée proposée d'abord par Stevin (1548-1620) puis perfectionnée par Werckmeister (1645-1706) avant de se propager dans l'ensemble de la musique occidentale. On les confond tous les deux au bénéfice de l'irrationnel racine douzième de 2.

Nous terminons ce paragraphe en montrant quelques gammes avec de plus en plus de notes et poursuivons l'algorithme (de Pythagore ?) quelque peu. Nous omettons d'expliciter ces diverses gammes, compte tenu de leur nombre important, sans outil plus élaboré de classification. Nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_6 = 17, \quad T_6 = 12, \quad D_6 = 5, \quad \theta_6 = \frac{2^8}{3^5} \approx 1.053498, \quad \delta_6 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643 \\ p_7 = 29, \quad T_7 = 12, \quad D_7 = 17, \quad \theta_7 = \frac{2^{27}}{3^{17}} \approx 1.039318, \quad \delta_7 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643 \\ p_8 = 41, \quad T_8 = 12, \quad D_8 = 29, \quad \theta_8 = \frac{2^{46}}{3^{29}} \approx 1.025329, \quad \delta_8 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643\,. \end{array} \right.$$

On retrouve là une famille de gammes de Pythagore à 41 degrés, dite de Paul von Janko (1856-1919) (voir par exemple Hellegouarch, 1999) et la famille suivante comporte 53 notes et est connue selon Hellegouarch avec le nom de Mercator (1620-1687) :

$$p_9 = 53, \quad T_9 = 41, \quad D_9 = 12, \quad \theta_9 = \frac{3^{12}}{2^{19}} \approx 1.013643, \quad \delta_9 = \frac{2^{65}}{3^{41}} \approx 1.011529\,.$$

Pour ces gammes, le ton et le demi-ton diffèrent à nouveau très peu puisque $\frac{\theta_9}{\delta_9} = \frac{3^{53}}{2^{84}} \approx 1.002090$, c'est à dire $|\frac{\theta_9}{\delta_9} - 1| \ll |\theta_9 - 1|$ et $|\frac{\theta_9}{\delta_9} - 1| \ll |\delta_9 - 1|$. Il est alors concevable de confondre les tons et les demi-tons pour former une seule gamme de cinquante trois degrés. Si on étudie le comportement des diverses familles de gammes pour k tendant vers l'infini, on trouve un système dynamique discret qui a des ruptures lorsque la différence entre le nombre irrationnel $k\,\frac{\log 3}{\log 2}$ et sa partie entière saute d'une valeur proche de 1 à une valeur proche de 0 (voir par exemple Arnold et Avez, 1967).

7) Quelques propriétés mathématiques

L'algorithme décrit au paragraphe précédent (relations (15) à (22)) joint à la « condition initiale » (23) des gammes à deux notes satisfait plusieurs propriétés mathématiques. Nous les énonçons et démontrons dans ce paragraphe.

Proposition 1. Équilibre harmonique
Le nombre de tons T_k et le nombre de demi-tons D_k sont, pour k entier supérieur ou égal à 1, premiers entre eux :

$$\big(T_k,\, D_k\big) = 1\,. \tag{24}$$

On a une propriété analogue pour le nombre de tons T_k et le nombre $p_k = T_k + D_k$ de notes d'une gamme d'ordre k :

$$\big(T_k,\, p_k\big) = 1\,. \tag{25}$$

La preuve de la Proposition 1 et en particulier celle de la relation (24) s'effectue par récurrence sur l'entier k, en utilisant l'identité de Bézout (voir par exemple Demazure, 1997) : les entiers x et y sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v de sorte que $u\,x + v\,y = 1$. On a dans un premier temps $T_1 = 1$ et $D_1 = 1$, donc ces deux unités sont clairement premières entre elles. Si la relation (24) est vraie jusqu'à l'ordre k, on a

$$u_k\, T_k + v_k\, D_k = 1 \tag{26}$$

pour deux entiers u_k et v_k. Mais alors, T_k et $T_k + D_k$ sont encore premiers entre eux, puisque la relation (26) s'écrit aussi :

$$(u_k - v_k)\, T_k + v_k\, (T_k + D_k) = 1\,. \tag{27}$$

Par suite, compte tenu des relations (19) et (21), le nouveau ton T_{k+1} et le nouveau demi-ton D_{k+1} sont toujours premiers entre eux. De plus, compte tenu de la relation (15) et de l'identité de Bézout, la relation (27) exprime exactement la relation (25) et la proposition est établie à l'ordre suivant. □

Proposition 2. Factorisabilité de la structure multiplicative
Pour k entier supérieur à 1 arbitraire, le nombre N_k de gammes à p_k notes (voir les relations (15) et (22)) est divisible par p_k :

$$\exists\ \tau_k \in \mathbb{N}\,,\ \ N_k = p_k\, \tau_k\,.$$

Pour démontrer la Proposition 2, rappelons d'abord que la relation (22) s'écrit $N_k = \begin{pmatrix} p_k \\ T_k \end{pmatrix}$. Donc elle entraîne $T_k\, N_k = p_k \begin{pmatrix} p_k - 1 \\ T_k - 1 \end{pmatrix}$ et l'entier p_k divise le produit $T_k\, N_k$. Comme p_k et N_k sont premiers entre eux d'après la proposition précédente, p_k divise N_k et la proposition en résulte. □

On introduit maintenant la famille de rationnels ξ_k déjà utilisée pour définir la famille des notes Ω_k. Compte tenu de la relation (8), on a

$$\Omega_k = \xi_k\, \omega_0\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

avec le nombre ξ_k défini par

$$\xi_k = \frac{3^k}{2^{l(k)}}\,,\ \ l(k) \leq k\, \frac{\log 3}{\log 2} \ < \ l(k) + 1\,. \tag{28}$$

On a alors la propriété suivante :

Proposition 3. Décalage
Soit $\mathcal{G}^k$ l'ensemble des gammes $\mathcal{G}_j^k\,(1 \leq j \leq N_k)$ définies aux relations (15) à (22) du paragraphe 6. Alors il existe $\varepsilon_k \in \{-1,\, +1\}$ tel que

$$\theta_k = \xi_{\varepsilon_k\, D_k}\,, \quad \delta_k = \xi_{-\varepsilon_k\, T_k}\,. \tag{29}$$

Le ton θ_k correspond pour la famille Ω de toutes les notes à un décalage de paramètre égal (au signe près) au nombre de demi-tons et le demi-ton δ_k à un décalage égal (au signe près) au nombre de tons. On peut ré-écrire de cette façon quelques gammes vues lors des paragraphes précédents :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{G}_1^1 & = & \{\, \Omega_0,\, \Omega_{0+1},\, 2\,\Omega_{0+1-1} \,\} \\ \mathcal{G}_3^2 & = & \{\, \Omega_0,\, \Omega_{0-1},\, \Omega_{0-1-1},\, 2\,\Omega_{0-1-1+2} \,\} \\ \mathcal{G}_{10}^3 & = & \{\, \Omega_0,\, \Omega_{0+2},\, \Omega_{0+2+2},\, \Omega_{0+2+2+2},\, \Omega_{0+2+2+2-3},\, 2\,\Omega_{0+2+2+2-3-3} \,\} \end{array} \right. \tag{30}$$

qui montre qu'on a clairement

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = \xi_1\,, \quad \delta_1 = \xi_{-1} \\ \theta_2 = \xi_{-1}\,, \;\; \delta_2 = \xi_2 \\ \theta_3 = \xi_2\,, \quad \delta_3 = \xi_{-3}\,. \end{array} \right. \tag{31}$$

La Proposition 3 s'établit par récurrence sur k. Pour $k = 1$, la première des relations (31) est claire et montre que les relations (29) ont bien lieu, avec de plus $\varepsilon_1 = +1$. Dans le cas général, on a toujours

$$\delta_k < \theta_k \tag{32}$$

et les relations (17) à (21) ont été construites pour maintenir cette propriété. On déduit donc de (32) et de l'hypothèse de récurrence l'inégalité suivante $\frac{3^{-\varepsilon_k\, T_k}}{2^{l(-\varepsilon_k\, T_k)}} < \frac{3^{\varepsilon_k\, D_k}}{2^{l(\varepsilon_k\, D_k)}}$, soit

$$l(\varepsilon_k\, D_k) - l(-\varepsilon_k\, T_k) < \varepsilon_k\, (T_k + D_k)\, \frac{\log 3}{\log 2}\,. \tag{33}$$

De plus, compte tenu de la relation (28), on a

$$l(\varepsilon_k\, D_k) \leq \varepsilon_k\, D_k\, \frac{\log 3}{\log 2} < l(\varepsilon_k\, D_k) + 1 \tag{34}$$

et

$$l(-\varepsilon_k\, T_k) \leq -\varepsilon_k\, T_k\, \frac{\log 3}{\log 2} < l(-\varepsilon_k\, T_k) + 1$$

dont on déduit par changement de signe

$$-l(-\varepsilon_k\, T_k) - 1 < \varepsilon_k\, T_k\, \frac{\log 3}{\log 2} \;\leq\; -l(-\varepsilon_k\, T_k)\,. \tag{35}$$

En additionnant les inégalités de droite des relations (34) et (35), il vient

$$\varepsilon_k\, (T_k + D_k)\, \frac{\log 3}{\log 2} < l(\varepsilon_k\, D_k) - l(-\varepsilon_k\, T_k) \, + \, 1\,. \tag{36}$$

Les relations (33) et (36) établissent donc, compte tenu de la définition (28), la propriété qui suit :

$$l(\varepsilon_k\, D_k) - l(-\varepsilon_k\, T_k) = l\big(\varepsilon_k\, (T_k + D_k)\big)\,, \quad k \geq 1\,. \tag{37}$$

Nous supposons dans ce paragraphe que la famille de gammes $\mathcal{G}^k$ de numéro k satisfait l'hypothèse $\theta_k < \delta_k^2$. On a alors, compte tenu des relations (17) à (21) :
$T_{k+1} = T_k + D_k,\ D_{k+1} = T_k,\ \theta_{k+1} = \delta_k$ et $\delta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$. Par suite, $\theta_{k+1} = \xi_{-\varepsilon_k\, T_k} = \xi_{-\varepsilon_k\, D_{k+1}}$ et la première relation (29) est vraie à l'ordre $k+1$, en remarquant que

(38) $$\varepsilon_{k+1} = -\varepsilon_k \quad \text{si} \quad \theta_k < \delta_k^2\,.$$

On a alors

$$\delta_{k+1} = \frac{\xi_{\varepsilon_k\, D_k}}{\xi_{-\varepsilon_k\, T_k}} = \frac{3^{\varepsilon_k\, D_k}}{2^{l(\varepsilon_k\, D_k)}}\ \frac{2^{l(-\varepsilon_k\, T_k)}}{3^{-\varepsilon_k\, T_k}} = \frac{3^{\varepsilon_k (T_k + D_k)}}{2^{l(\varepsilon_k\, D_k) - l(-\varepsilon_k\, T_k)}}$$
$$= \frac{3^{\varepsilon_k (T_k + D_k)}}{2^{l(\varepsilon_k (T_k + D_k))}} \qquad \text{compte tenu de la relation (37)}$$
$$= \frac{3^{-\varepsilon_{k+1} T_{k+1}}}{2^{l(-\varepsilon_k\, T_{k+1})}} = \xi_{-\varepsilon_{k+1}\, T_{k+1}} \qquad \text{au vu de la relation (38)}$$

et la seconde relation de (29) passe à l'ordre supérieur.

Dans l'autre cas de figure où l'on a $\theta_k > \delta_k^2$, on déduit des relations (17) à (21) : $T_{k+1} = T_k$, $D_{k+1} = T_k + D_k,\ \theta_{k+1} = \frac{\theta_k}{\delta_k}$ et $\delta_{k+1} = \delta_k$. Il résulte alors des relations (29) $\delta_{k+1} = \delta_k = \xi_{-\varepsilon_k\, T_k} = \xi_{-\varepsilon_k\, T_{k+1}}$ et la seconde relation (29) est encore vraie à l'ordre $k{+}1$, avec

$$\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k \quad \text{si} \quad \theta_k > \delta_k^2\,.$$

On a alors $\theta_{k+1} = \dfrac{\xi_{\varepsilon_k\, D_k}}{\xi_{-\varepsilon_k\, T_k}} = \xi_{\varepsilon_k (T_k + D_k)}$ compte tenu de (37) et du calcul mené plus haut, donc $\theta_{k+1} = \xi_{\varepsilon_{k+1} D_{k+1}}$ et la première relation (29) est vraie à l'ordre $k{+}1$. La proposition 3 est établie. □

8) Structure multiplicative et tonalité

On utilise dans ce paragraphe une gamme γ à p notes qui commence par un *do*. C'est une suite $\big(\nu_j\big)_{0 \leq j \leq p}$ de la forme

(39) $$\gamma = \{\omega_0 = \nu_0,\, \nu_1,\, \cdots,\, \nu_j < \nu_{j+1},\, \cdots,\, \nu_{p-1},\, \nu_p = 2\,\omega_0\}\,.$$

De plus, le rapport ν_{j+1}/ν_j de deux notes successives est soit un ton θ soit un demi-ton δ :

$$\frac{\nu_{j+1}}{\nu_j} \in \{\,\theta,\, \delta\,\}, \qquad 0 \leq j \leq p-1\,.$$

Par définition, la **structure multiplicative** $\mathcal{S}(\gamma)$ de la gamme γ est la suite des rapports de fréquences entre deux notes successives, c'est à dire :

$$\mathcal{S}(\gamma) = \Big(\frac{\nu_1}{\nu_0},\, \frac{\nu_2}{\nu_1},\, \cdots,\, \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j},\, \cdots,\, \frac{\nu_p}{\nu_{p-1}}\Big) \ \in\ \{\,\theta,\, \delta\,\}^p\,.$$

La structure $\mathcal{S}(\gamma)$ permet de savoir quel est l'agencement précis des tons et des demi-tons de la gamme γ. Si T est le nombre de tons et D le nombre de demi-tons de cette gamme, on a vu que

$$p = T\, +\, D\,.$$

De plus (Proposition 3), il existe $\varepsilon \in \{-1,\, +1\}$ tel que

$$\theta = \xi_{\varepsilon\, D}\,, \qquad \delta = \xi_{-\varepsilon\, T}$$

ce qui permet de construire les notes ν_j de la gamme γ par décalage successif des indices des notes « de base » Ω_k, comme illustré aux exemples (30). Il est donc naturel de ne pas forcément commencer une gamme de structure $\mathcal{S}(\gamma)$ par le *do* (ou Ω_0) mais par une note Ω_k arbitraire telle qu'introduite au paragraphe 3.

Par définition, la gamme $\Gamma(\mathcal{S}(\gamma),\, \Omega_k)$ de structure multiplicative $\mathcal{S}(\gamma)$ et de **tonalité** Ω_k est la gamme obtenue à partir de la relation (39) en gardant la même structure $\big(\mu_1 = \frac{\nu_1}{\nu_0},\, \mu_2 = \frac{\nu_2}{\nu_1},\, \cdots,\, \mu_j = \frac{\nu_{j+1}}{\nu_j},\, \cdots,\, \mu_p = \frac{\nu_p}{\nu_{p-1}}\big)$ que la gamme γ mais en changeant la première note générique ω_0 pour la note particulière Ω_k. On a donc en général

$$\Gamma(\sigma,\, \Omega_k) = \big\{\, \Omega_k,\, \mu_1\, \Omega_k,\, \mu_2\, \mu_1\, \Omega_k,\, \cdots,\, (\mu_j \mu_{j-1} \cdots \mu_1)\, \Omega_k,\, \cdots,\, 2\, \Omega_k \,\big\} \tag{40}$$

si

$$\sigma = \big(\, \mu_1,\, \mu_2\,,\, \cdots,\, \mu_j,\, \cdots,\, \mu_p \big) \quad \in \; \{\, \theta,\, \delta\, \}^p\,.$$

Nous avons vu au paragraphe 3 que les structures des deux gammes primitives à deux notes, à savoir

$$\mathcal{S}_1 = \Big(\frac{3}{2},\, \frac{4}{3}\Big)\,,\;\; \mathcal{S}_2 = \Big(\frac{4}{3},\, \frac{3}{2}\Big)$$

permettent de construire de proche en proche la suite infinie $\big(\Omega_k\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ de toutes les notes. Afin de s'autoriser une richesse tonale arbitraire, nous ne devons retenir de la construction proposée au paragraphe 6 que la structure multiplicative des différentes gammes. Le paragraphe suivant propose d'y mettre un peu d'ordre, avec une classification en type et mode.

9) Type et mode

On suppose dans ce paragraphe que l'on a fixé le nombre p de notes (avec p de la forme $p = p_k$ pour un certain entier k que l'on n'écrit pas pour alléger les notations), un nombre de tons T et un nombre de demi-tons D, la valeur du ton θ et du demi-ton δ. On note $\mathbf{G}^p$ l'ensemble des gammes commençant par la note *do* et comportant exactement p notes. L'ensemble $\mathbf{S}^p$ des structures multiplicatives des gammes à p notes est l'ensemble des p-uplets à valeurs dans la paire $\{\theta,\, \delta\}$ tels que le nombre de tons θ est égal à T et le nombre de demi-tons δ est exactement égal à D :

$$\mathbf{S}^p \; = \left\{ \begin{array}{l} \big\{\, (\mu_1,\, \mu_2,\, \cdots,\, \mu_p),\, \mu_j \in \{\theta,\, \delta\} \quad \forall j \in \{1,\, \cdots,\, p\}, \\ \qquad\qquad \sharp\{j,\, \mu_j = \theta\} = T, \quad \sharp\{j,\, \mu_j = \delta\} = D \;\big\}\,. \end{array} \right.$$

Il est facile de voir que, comme $\mathbf{G}^p$, l'ensemble $\mathbf{S}^p$ comporte exactement $N = \binom{p}{T}$ éléments distincts puisqu'il suffit de choisir la position des T tons parmi les p possibles rapports des notes successives.

On regarde maintenant comment agit la permutation circulaire σ définie par $1 \mapsto 2,\; 2 \mapsto 3$, ... , $p{-}1 \mapsto p$ et $p \mapsto 1$ de l'ensemble $\{1,\, \cdots,\, p\}$:

$$\sigma = \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & \cdots & p{-}1 & p \\ 2 & 3 & \cdots & p & 1 \end{array}\right)$$

sur l'ensemble $\mathbf{S}^p$ des structures multiplicatives des gammes à p notes. À partir d'une configuration donnée $(\mu_1,\, \mu_2\,,\, \cdots,\, \mu_p)$ appartenant à $\mathbf{S}^p$, on pose

$$\sigma\, (\mu_1,\, \mu_2\,,\, \cdots,\, \mu_p) = \big(\, \mu_{\sigma(1)},\, \mu_{\sigma(2)}\,,\, \cdots,\, \mu_{\sigma(p)} \,\big)$$

qui appartient encore à la famille $\mathbf{S}^p$. Deux structures multiplicatives $(\mu_1,\, \mu_2,\, \cdots \;\; \cdots \,,\, \mu_p)$ et $(\mu'_1,\, \mu'_2\,,\, \cdots \,,\, \mu'_p)$ sont dites de même **type** si il existe une permutation circulaire σ de l'ensemble $\{1, \cdots , p\}$ et un entier $i \in \{0,\, \cdots \,,\, p{-}1\}$ de sorte que

$$\mu'_j = \mu_{\sigma^i(j)} \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } 1 \leq j \leq p\,. \tag{41}$$

L'ensemble $\mathbf{T}^p$ des types des gammes à p notes est l'ensemble des structures multiplicatives des gammes à p notes à une permutation circulaire près. Le nombre de types

$$\sharp\, \mathbf{T}^p = \frac{1}{p} \binom{p}{T} \quad ; \quad p = T + D$$

est bien un nombre entier, comme on l'a vu lors de la proposition 2 de la septième partie. Il y a un seul type de gammes à deux notes et un seul type de gammes à trois notes, deux types de gammes à cinq notes, trois types de gammes à sept notes, soixante six types de gammes à douze notes, etc. D'un point de vue formel, l'ensemble des types $\mathbf{T}^p$ est le quotient de l'ensemble $\mathbf{S}^p$ par l'équivalence $\sim$ suivante :

$$\mu \sim \mu' \text{ si et seulement si } \exists\, i \in \{0,\, \cdots \,,\, p{-}1\}, \text{ la relation (41) a lieu}$$

et on note $\mathbf{T}^p = \mathbf{S}^p / \sim$.

On suppose dans la suite qu'un représentant $\tau \in \widetilde{\tau}$ de chaque type $\widetilde{\tau} \in \mathbf{T}^p$ a été **choisi**. Il s'agit en pratique d'une structure multiplicative, à une permutation près :

$$\tau = \big(\, \mu_1,\, \mu_2\,,\, \cdots \,,\, \mu_j,\, \cdots \,,\, \mu_p \,\big) \;\in\; \widetilde{\tau} \;\in\; \mathbf{T}^p\,. \tag{42}$$

Pour les gammes de moins de cinq notes, nous proposons le choix suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcll} \tau^1 & = & \big(\frac{3}{2},\, \frac{4}{3}\big) & \in\; \mathbf{S}^2 \\ \tau^2 & = & \big(\frac{4}{3},\, \frac{9}{8},\, \frac{4}{3}\big) & \in\; \mathbf{S}^3 \\ \tau^3_1 & = & \big(\frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27}\big) & \in\; \mathbf{S}^5 \\ \tau^3_2 & = & \big(\frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8},\, \frac{32}{27},\, \frac{9}{8}\big) & \in\; \mathbf{S}^5 \end{array} \right.$$

On a alors, compte tenu des relations (4) (12) et de la structure des gammes $\big(\mathcal{G}^3_3\big)$ et $\big(\mathcal{G}^3_5\big)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}\big(\mathcal{G}^1_1\big) = \tau^1 \\ \mathcal{S}\big(\mathcal{G}^2_2\big) = \tau^2 \\ \mathcal{S}\big(\mathcal{G}^3_5\big) = \tau^3_1 \\ \mathcal{S}\big(\mathcal{G}^3_3\big) = \tau^3_2\,. \end{array} \right. \tag{43}$$

Une fois le type fixé et (surtout) une structure multiplicative τ qui le représente, on construit simplement une gamme « fondamentale » $\mathcal{G}_\tau$ en commençant par convention par la note *do*, comme on l'a vu aux relations (43) pour les gammes à deux, trois et cinq notes. Il est alors « naturel » de fabriquer les autres gammes de même type, mais par définition de **mode** différent, en construisant les p gammes ayant les mêmes notes que $\mathcal{G}_\tau$, mais obtenues par action successive de la permutation circulaire σ. Si le type τ a un représentant donné en (42), on a (cf. (40)) :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{G}_\tau & = & \big\{\, \omega_0,\, \mu_1\, \omega_0,\, \cdots \,,\, (\mu_1 \cdots \mu_j)\, \omega_0,\, \cdots \,,\, (\mu_1 \cdots \mu_{p-1})\, \omega_0,\, 2\, \omega_0 \,\big\} \\ \mathcal{G}_\tau & \equiv & \big\{\, \Phi_{\tau,0},\, \Phi_{\tau,1},\, \cdots \,,\, \Phi_{\tau,j},\, \cdots \,,\, \Phi_{\tau,p-1},\, 2\, \Omega_0 \,\big\} \end{array} \right.$$

avec

$$\Phi_{\tau,\,0} = \Omega_0 \,,\;\; \Phi_{\tau,\,j} = \mu_{j-1}\,\Phi_{\tau,\,j-1} \,,\;\; 1 \leq j \leq p{-}1\,.$$

Pour les quatre exemples précédents, on a

$$\Phi_{\tau^1,\,1} = \Omega_1 = \mathit{sol}$$

$$\Phi_{\tau^2,\,1} = \Omega_{-1} = \mathit{fa} \,,\;\; \Phi_{\tau^2,\,2} = \Omega_1 = \mathit{sol}$$

$$\Phi_{\tau_1^3,\,1} = \Omega_3 = \mathit{mi}\,\flat \,,\;\; \Phi_{\tau_1^3,\,2} = \Omega_{-1} = \mathit{fa} \,,\;\; \Phi_{\tau_1^3,\,3} = \Omega_1 = \mathit{sol} \,,\;\; \Phi_{\tau_1^3,\,4} = \Omega_3 = \mathit{la} \tag{44}$$

$$\Phi_{\tau_2^3,\,1} = \Omega_2 = \mathit{ré} \,,\;\; \Phi_{\tau_2^3,\,2} = \Omega_{-1} = \mathit{fa} \,,\;\; \Phi_{\tau_2^3,\,3} = \Omega_1 = \mathit{sol} \,,\;\; \Phi_{\tau_2^3,\,4} = \Omega_{-2} = \mathit{si}\,\flat \,. \tag{45}$$

Le mode $i \in \{0, \cdots, p{-}1\}$ du type τ est engendré par la gamme de première note $\Phi_{\tau,\,i}$ et de structure $\big(\mu_{\sigma^i(1)}, \mu_{\sigma^i(2)}, \cdots, \mu_{\sigma^i(p)}\big)$: on fait agir i fois la permutation circulaire σ de référence. On pose en conséquence :

$$\mathcal{G}_{\tau,\,i} = \big\{\, \Phi_{\tau,\,i},\, \Phi_{\tau,\,i+1}, \cdots, \Phi_{\tau,\,p-1},\, 2\,\Omega_0,\, 2\,\Phi_{\tau,\,1}, \cdots, 2\,\Phi_{\tau,\,i-1} \,\big\}$$

et on a par définition même

$$\mathcal{S}(\mathcal{G}_{\tau,\,i}) = \big(\, \mu_{\sigma^i(1)}, \mu_{\sigma^i(2)}, \cdots, \mu_{\sigma^i(p)} \,\big)\,.$$

Il peut être utile de nommer le mode, c'est à dire le choix précis de la structure multiplicative à travers le type et l'ordre de la permutation circulaire grâce au nom de la première note $\Phi_{\tau,\,i}$. Pour les gammes à deux notes, on a un seul type et deux modes, le mode de *do* qui débute par une quinte et le mode de *sol* qui commence par une quarte :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau^1,\,0} = \big\{\, \mathit{do},\, \mathit{sol},\, \mathit{do}^* \,\big\} = \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{G}_{\tau^1,\,1} = \big\{\, \mathit{sol},\, \mathit{do},\, \mathit{sol}^* \,\big\} = \mathcal{D}_2(\mathit{sol})\,. \end{cases}$$

Pour les gammes à trois notes, on a encore un seul type mais, outre le mode de *do*, on dispose des modes de *fa* et de *sol* :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau^2,\,0} = \big\{\, \mathit{do},\, \mathit{fa},\, \mathit{sol},\, \mathit{do}^* \,\big\} = \mathcal{G}_2^2 \\ \mathcal{G}_{\tau^2,\,1} = \big\{\, \mathit{fa},\, \mathit{sol},\, \mathit{do}^*,\, \mathit{fa}^* \,\big\} = \mathcal{G}_2^1(\Omega_{-1}) \\ \mathcal{G}_{\tau^2,\,2} = \big\{\, \mathit{sol},\, \mathit{do}^*,\, \mathit{fa}^*,\, \mathit{sol}^* \,\big\} = \mathcal{G}_2^3(\Omega_1)\,. \end{cases}$$

Pour les gammes à cinq notes, la classification (type, mode) permet un nouveau rangement des dix gammes vues au paragraphe 5 comme des gammes qui débutent par la note *do.* On trouve pour le premier type (relation (44)), les cinq modes de *do*, *mi* $\flat$, *fa*, *sol*, *la* :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau_1^3,\,0} = \big\{\, \mathit{do},\, \mathit{mi}\,\flat,\, \mathit{fa},\, \mathit{sol},\, \mathit{la},\, \mathit{do}^* \,\big\} = \mathcal{G}_5^3 \\ \mathcal{G}_{\tau_1^3,\,1} = \big\{\, \mathit{mi}\,\flat,\, \mathit{fa},\, \mathit{sol},\, \mathit{la},\, \mathit{do}^*,\, \mathit{mi}\,\flat^* \,\big\} = \mathcal{G}_{10}^3(\Omega_{-3}) \\ \mathcal{G}_{\tau_1^3,\,2} = \big\{\, \mathit{fa},\, \mathit{sol},\, \mathit{la},\, \mathit{do}^*,\, \mathit{mi}\,\flat^*,\, \mathit{fa}^* \,\big\} = \mathcal{G}_{10}^3(\Omega_{-1} \\ \mathcal{G}_{\tau_1^3,\,3} = \big\{\, \mathit{sol},\, \mathit{la},\, \mathit{do}^*,\, \mathit{mi}\,\flat^*,\, \mathit{fa}^*,\, \mathit{sol}^* \,\big\} = \mathcal{G}_7^3(\Omega_1) \\ \mathcal{G}_{\tau_1^3,\,4} = \big\{\, \mathit{la},\, \mathit{do}^*,\, \mathit{mi}\,\flat^*,\, \mathit{fa}^*,\, \mathit{sol}^*,\, \mathit{la}^* \,\big\} \;=\; \mathcal{G}_9^3(\Omega_3)\,. \end{cases}$$

Pour le second type (relation (45)), on dispose des cinq modes de *do*, *ré*, *fa*, *sol* et *si* $\flat$:

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau_2^3,\,0} = \{\, do,\ ré,\ fa,\ sol,\ si\,\flat,\ do^* \,\} = \mathcal{G}_3^3 \\ \mathcal{G}_{\tau_2^3,\,1} = \{\, ré,\ fa,\ sol,\ si\,\flat,\ do^*,\ ré^* \,\} = \mathcal{G}_8^3(\Omega_2) \\ \mathcal{G}_{\tau_2^3,\,2} = \{\, fa,\ sol,\ si\,\flat,\ do^*,\ ré^*,\ fa^* \,\} = \mathcal{G}_2^3(\Omega_{-1}) \\ \mathcal{G}_{\tau_2^3,\,3} = \{\, sol,\ si\,\flat,\ do^*,\ ré^*,\ fa^*,\ sol^* \,\} = \mathcal{G}_6^3(\Omega_1) \\ \mathcal{G}_{\tau_2^3,\,4} = \{\, si\,\flat,\ do^*,\ ré^*,\ fa^*,\ sol^*,\ si\,\flat^* \,\} = \mathcal{G}_1^3(\Omega_{-2})\,. \end{cases}$$

10) Gammes à sept notes

Avec les définitions introduites plus haut, il existe 21 gammes à 7 notes qui commencent par la note *do*, composées de 5 tons θ_4 où

$$\theta_4 = \xi_2 = \frac{9}{8}$$

et de deux demi-tons δ_4 avec

$$\delta_4 = \xi_{-5} = \frac{2^8}{3^5}\,.$$

Nous proposons de les construire dans ce paragraphe, en utilisant la classification par type et mode introduite dans les paragraphes précédents. On dispose de trois types et pour chacun de ces types, de sept modes. Nous posons ici, mais il s'agit d'une convention et d'autres choix équivalents sont possibles,

$$\begin{cases} \tau_1^4 = \{\theta_4,\ \theta_4,\ \delta_4,\ \delta_4,\ \theta_4,\ \theta_4,\ \theta_4\} \\ \tau_2^4 = \{\theta_4,\ \theta_4,\ \delta_4,\ \theta_4,\ \delta_4,\ \theta_4,\ \theta_4\} \\ \tau_3^4 = \{\theta_4,\ \theta_4,\ \delta_4,\ \theta_4,\ \theta_4,\ \theta_4,\ \delta_4\}\,. \end{cases} \tag{46}$$

Ces trois types sont caractérisés par la « distance » entre les demi-tons : jointifs pour le type τ_1^4, distants d'un ton pour le second type τ_2^4 et distants de deux et trois tons pour le troisième type τ_3^4. Cette information est claire au vu des relations (46) si l'on garde en mémoire l'hypothèse d'invariance d'un type par permutation circulaire. Ce troisième type τ_3^4 est appelé classique dans la suite.

Pour ces trois types, les gammes fondamentales, c'est à dire en mode de *do* s'écrivent facilement. On a :

$$\begin{cases} \mathcal{G}_{\tau_1^4,0} = \begin{cases} \{do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol\,\flat,\ la\,\flat\,,\ si\,\flat\,,\ do^* \,\} \\ \{\,\Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_{-1},\ \Omega_{-6},\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0\,\} \end{cases} \\ \mathcal{G}_{\tau_2^4,0} = \begin{cases} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol,\ la\,\flat\,,\ si\,\flat\,,\ do^* \,\} \\ \{\,\Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0\,\} \end{cases} \\ \mathcal{G}_{\tau_3^4,0} = \begin{cases} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol,\ la\,,\ si,\ do^* \,\} \\ \{\,\Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \Omega_5,\ 2\,\Omega_0\,\} \end{cases} \end{cases}$$

ce qui permet (enfin !) de retrouver la gamme la plus « élémentaire ». Pour chacun de ces types, on dispose de sept modes distincts. Leurs noms sont obtenus en lisant les noms des notes des gammes précédentes, choisies pour la classification. Il vient :

$$\begin{cases} \text{Modes de type } \tau_1^4 \ :\ do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol\,\flat,\ la\,\flat,\ si\,\flat \\ \text{Modes de type } \tau_2^4 \ :\ do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol,\ la\,\flat,\ si\,\flat \\ \text{Modes (classiques) de type } \tau_3^4 \ :\ do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol,\ la,\ si\,. \end{cases} \tag{47}$$

Pour chacun de ces modes, nous exposons simplement la gamme de tonalité *do* qui par définition commence par *do*, ce qui fournit une suite possible des 21 gammes à sept notes. Pour le type τ_1^4, la suite des modes est donnée à la première des relations (47). On trouve alors :

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{G}_{\tau_1^4,0}\,(do) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol\,\flat,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_{-1},\ \Omega_{-6},\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_2^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,1}\,(ré) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi\,\flat,\ fa\,\flat,\ sol\,\flat,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-8},\ \Omega_{-6},\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_3^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,2}\,(mi) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré\,\flat,\ mi\,\flat\flat,\ fa\,\flat,\ sol\,\flat,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_{-5},\ \Omega_{-10},\ \Omega_{-8},\ \Omega_{-6},\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_4^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,3}\,(fa) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré\,\flat,\ mi\,\flat,\ fa,\ sol,\ la,\ si,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_{-5},\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \Omega_5,\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_5^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,4}\,(sol\,\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa\,\sharp,\ sol\,\sharp,\ la\,\sharp,\ si,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_6,\ \Omega_8,\ \Omega_{10},\ \Omega_5,\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_6^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,5}\,(la\,\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa\,\sharp,\ sol\,\sharp,\ la,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_6,\ \Omega_8,\ \Omega_3,\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_7^4 = \mathcal{G}_{\tau_1^4,6}\,(si\,\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa\,\sharp,\ sol,\ la\,\flat,\ si\,\flat\ ,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_6,\ \Omega_1,\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\}\,. \end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

Pour le type τ_2^4, la suite des modes est donnée par la seconde relation (47). Nous avons donc en choisissant toujours de faire opérer ces modes sur la tonalité de *do* :

$$
\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{G}_8^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,0}\,(do) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_9^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,1}\,(ré) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi\,\flat,\ fa,\ sol\,\flat,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-1},\ \Omega_{-6},\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_{10}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,2}\,(mi) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré\,\flat,\ mi\,\flat,\ fa\,\flat,\ sol\,\flat,\ la\,\flat,\ si\,\flat\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_{-5},\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-8},\ \Omega_{-6},\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_{11}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,3}\,(fa) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi\,\flat,\ fa,\ sol,\ la,\ si,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \Omega_5,\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_{12}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,4}\,(sol) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré\,\flat,\ mi\,\flat,\ fa,\ sol,\ la,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_{-5},\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_{13}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,5}\,(la\,\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa\,\sharp,\ sol\,\sharp,\ la,\ si,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_6,\ \Omega_8\ ,\ \Omega_3,\ \Omega_5,\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}_{14}^4 = \mathcal{G}_{\tau_2^4,6}\,(si\,\flat) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa\,\sharp,\ sol,\ la,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_6,\ \Omega_1\ ,\ \Omega_3,\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\}\,. \end{array} \right.
\end{array} \right.
$$

Pour le type classique τ_3^4, la suite des modes est donnée par la troisième relation (47), la suite plus courante des notes « sans altération ». Les tonalités de la gamme de *do* s'écrivent dans ces sept modes de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\mathcal{G}^4_{15} = \mathcal{G}_{\tau_3^4,\,0}\,(do) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol,\ la,\ si,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \Omega_5,\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}^4_{16} = \mathcal{G}_{\tau_3^4,\,1}\,(ré) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi\,\flat,\ fa\ ,\ sol,\ la,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}^4_{17} = \mathcal{G}_{\tau_3^4,\,2}\,(mi) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré\,\flat,\ mi\,\flat,\ fa,\ sol,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_{-5},\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}^4_{18} = \mathcal{G}_{\tau_3^4,\,3}\,(fa) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa\,\sharp,\ sol,\ la,\ si,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_6,\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \Omega_5,\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}^4_{19} = \mathcal{G}_{\tau_3^4,\,4}\,(sol) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré,\ mi,\ fa,\ sol,\ la,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_4,\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_3,\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}^4_{20} = \mathcal{G}_{\tau_3^4,\,5}\,(la) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do\ ,\ ré\ ,\ mi\,\flat,\ fa,\ sol,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_2,\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-1},\ \Omega_1,\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\} \end{array} \right. \\
\mathcal{G}^4_{21} = \mathcal{G}_{\tau_3^4,\,6}\,(si) = \left\{ \begin{array}{l} \{\, do,\ ré\,\flat,\ mi\,\flat,\ fa,\ sol\,\flat,\ la\,\flat,\ si\,\flat,\ do^* \,\} \\ \{\, \Omega_0,\ \Omega_{-5},\ \Omega_{-3},\ \Omega_{-1},\ \Omega_{-6},\ \Omega_{-4},\ \Omega_{-2},\ 2\,\Omega_0 \,\}\ . \end{array} \right.
\end{array} \right.$$

Le mode de *do* de type classique est le mode **majeur** et le mode de *la* le mode **mineur**. Le mode de *ré* ou dorien a le charme de la musique du moyen-âge. Les modes de *mi* et de *si* commencent la gamme par un demi-ton. Les modes de *fa* et de *sol* ne doivent pas être confondus avec les gammes de “fa majeur” et “sol majeur” et leur *si* $\flat$ et *fa* $\sharp$ à l’armure, au bénéfice de la langueur du mode de *fa* et de l’éclat retrouvé du mode de *sol*.

Conclusion

Dans ce travail, nous sommes partis d’une division très simple de l’octave pour former des gammes primitives à deux notes. Nous avons montré ensuite qu’avec cette notion élémentaire, l’invariance multiplicative des tonalités induit naturellement un nombre de notes *a priori* infini. Nous avons alors proposé une définition récursive d’une famille de gammes qui permet de reconstruire la gamme de Pythagore et ses diverses variantes. Une classification en type et mode utilise la structure cyclique du motif formé par la suite des tons et demi-tons. Nous avons détaillé les gammes à sept notes, en insistant sur le fait que deux structures seulement sur les vingt et une possibles sont utilisées dans la musique classique occidentale.

Une telle construction théorique sur un sujet très classique a probablement été formalisée en des termes voisins dans des travaux antérieurs. Mais nous n’avons pas encore à ce jour trouvé de précurseur pour cette construction précise.

Avec une approche qui introduit une grande variété de gammes, nous pouvons envisager la musique globalement, sans se limiter aux constructions occidentales, en particulier pour les gammes pentatoniques abordées dans cette contribution. Nous renvoyons le lecteur à l’article d’Alain Boudet (2006) pour une présentation des gammes occidentales, arabes, chinoises et indiennes. Pour une étude approfondie de la musique arabe du 20e siècle, nous nous référons par exemple à Ahmed et Mohamed Elhabib Hachlef (1993) et pour la musique chinoise, à l’ouvrage de François Picard (1991). Le jazz utilise aussi des gammes pentatoniques et nous suggérons au lecteur les ouvrages de Jacques Siron (1992) et Mark Levine (1995). Enfin, une introduction à la musique indienne est proposée par Patrick Moutal (1987).

Il est bien sûr possible d'enrichir la construction précédente *via* par un algorithmique plus complexe prenant comme base de construction non seulement le troisième harmonique de la vibration d'une corde mais aussi celui associé au cinquième de la longueur, comme le propose la gamme de Zarlino. Toutefois, il semble utile à ce niveau d'explorer quelles sont les gammes proposées dans ce mémoire qui ont été ou sont effectivement utilisées pour composer de la musique et quelles sont les musiques dont l'écriture ou la tradition utilise des gammes qui relèvent d'un autre type de construction formelle. Enfin, une expérimentation musicale de la gamme $\mathcal{G}_{14}^{4}$ est proposée par Christian Clavère (2021).

Remerciements

Sans les remarques de Stéphane Dubois, Jean-François Gonzales, Maurice Rosset et Michel Rosset, le texte initial n'existerait pas sous cette forme. L'édition de 2021 a bénéficié des encouragements de Thomas Hélie et Roger Ohayon ainsi que d'une lecture très constructive de Johan Broekaert, André Calvet et Christian Clavère. Certaines de leurs suggestions ont parfois été intégrées au sein de cette version finale. Qu'ils soient tous remerciés pour leur aide.

Références bibliographiques

C. Abromont, E. de Montalembert, *Guide de la théorie de la musique*, Fayard-Lemoine, Paris, 2001.

M. Andreatta, *Méthodes algébriques en musique et musicologie du 20e siècle : aspects théoriques, analytiques et compositionnels*, Thèse, École des Hautes Etudes en Sciences Sociales, 2003.

Aristoxène de Tarente, *Éléments harmoniques*, -330, traduction Charles-Émile Ruelle, P. Haffner, Paris, 1870.

V. Arnold, A. Avez, *Problèmes ergodiques de la mécanique classique*, Gauthier-Villars, Paris, 1967.

R. Bosanquet, *An elementary treatise on musical intervals, with an account of an enharmonic harmonium exhibited in the loan collection of scientific instruments*, Macmillan and Co, Londres, 1876.

A. Boudet, Gammes et modes musicaux, academia.edu/44898805 et spirit-science.fr, 2006.

J. Broekaert, Le mésotonique tempéré de Bach, relatif à « Das wohltemperirte Clavier », academia.edu/44820384, 2021.

A. Calvet, *Le clavier bien obtempéré*, piano e forte éditions, Montpellier, 2020.

J. Chailley, *L'Imbroglio des modes*, Leduc, Paris, 1960.

C. Clavère, https://www.youtube.com/watch?v=y3POXTg1Afk&t=9s, 2021 ; voir aussi https://www.youtube.com/channel/UCaQQyJ3y-3mc5MECbn8oMBw/videos.

A. Daniélou, *Traité de musicologie comparée*, Hermann, Paris, 1959.

M. Demazure, *Cours d'algèbre ; primalité, divisibilité, codes*, Nouvelle bibliothèque mathématique, Cassini, Paris, 1997.

F. Dubois, Pourquoi la gamme a sept notes ? Une mathématique des notes et des gammes, 1999, prépublication hal.archives-ouvertes.fr/hal-03177187, 2021.

A. Hachlef et M.-E. Hachlef, *Anthologie de la musique arabe, 1906-1960*, Publisud éditions, Paris, 1993.

Y. Hellegouarch, Gammes naturelles, *La gazette des mathématiciens*, n°81, pages 25-39, juillet 1999 et n°82, pages 13-25, octobre 1999.

T. Hélie, C. Picasso, A. Calvet, The Snail : un nouveau procédé d'analyse et de visualisation du son, Congrès Europiano France, Tours, 2016, hal.archives-ouvertes.fr/hal-01467014, 2016.

M. Levine *The jazz theory book*, Sher Music Company, Petaluma, Californie, 1995.

F. Marpurg, *Versuch über die musikalische Temperatur nebst einem Anhang über den Rameau und Kirnbergerschen Grundbaß*, Johann Friedrich Korn, Breslau, 1776.

M. Mersenne, *L'Harmonie universelle, contenant la théorie et la pratique de la musique*, Sébastien Cramoisy, ruë S. Jacques, aux Cigognes, Paris, 1636.

P. Moutal, *Hindustani Raga Sangeet ; mécanismes de base de la musique classique du Nord de l'Inde*, Centre d'Études de Musique Orientale, Paris, 1987.

F. Picard, *La musique chinoise*, Minerve, Paris, 1991.

J.-P. Rameau, *Traité de l'harmonie réduite à ses principes naturels*, Jean-Baptiste Christophe Ballard, rue Saint-Jean-de-Beauvais, au Mont-Parnasse, Paris, 1722.

H. Riemann, *Riemanns Musiklexikon. Theorie und Geschichte der Musik, die Tonkünstler alter und neuer Zeit mit Angabe ihrer Werke, nebst einer vollständigen Instrumentenkunde*, Verlag des Bibliographischen Instituts, Leipzig, 1882.

A. Schönberg, *Harmonielehre*, Universal Edition, Vienne, 1911.

L. Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, Paris, 1965.

J. Siron, *La partition intérieure ; jazz, musiques improvisées*, Outre Mesure, Paris, 1992.

S. Stevin, *Van de Spiegheling der Singconst*, manuscrit de 1605, David Bierens de Haan, Amsterdam, 1884.

A. Werckmeister, *Musichalische Temperatur*, Quedlinburg, Allemagne, 1691.

I. Wyschnegradsky, *Manuel d'harmonie à quart de ton*, La Sirène Musicale, Paris, 1932.

I. Xenakis, *Musiques formelles*, La Revue Musicale, Paris, 1963.

G. Zarlino da Chioggia, *Le istitutioni harmoniche*, Venise, 1558.

Woo Shingkwan, *The ceremonial music of Zhu Zaiyu*, Doctorat de Philosophie de l'Université Rutgers, New Jersey, 2017.