

VALUATION AUGMENTÉE ET PAIRE MINIMALE

Michel Vaquié

► **To cite this version:**

| Michel Vaquié. VALUATION AUGMENTÉE ET PAIRE MINIMALE. 2020. hal-02565309

HAL Id: hal-02565309

<https://hal-cnrs.archives-ouvertes.fr/hal-02565309>

Preprint submitted on 6 May 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

VALUATION AUGMENTÉE ET PAIRE MINIMALE

MICHEL VAQUIÉ

RÉSUMÉ. Soit (K, ν) un corps valué, les notions de *valuation augmentée*, de *valuation augmentée limite* et de *famille admise* de valuations permettent de donner une description de toute valuation μ de $K[x]$ prolongeant ν . Dans le cas où le corps K est algébriquement clos cette description est particulièrement simple et nous pouvons la réduire aux notions de *paire minimale* et de *famille pseudo-convergente*.

Soient (K, ν) un corps valué hensélien et $\bar{\nu}$ l'unique extension de ν à la clôture algébrique \bar{K} de K et soit μ une valuation de $K[x]$ prolongeant ν , nous étudions les extensions $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$ et nous donnons une description des valuations $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$ qui sont les extensions des valuations μ_i appartenant à la famille admise associée à μ .

ABSTRACT. Let (K, ν) be a valued field, the notions of *augmented valuation*, of *limit augmented valuation* and of *admissible family* of valuations enable to give a description of any valuation μ of $K[x]$ extending ν . In the case where the field K is algebraically closed, this description is particularly simple and we can reduce it to the notions of *minimal pair* and *pseudo-convergent family*.

Let (K, ν) be a henselian valued field and $\bar{\nu}$ the unique extension of ν to the algebraic closure \bar{K} of K and let μ be a valuation of $K[x]$ extending ν , we study the extensions $\bar{\mu}$ from μ to $\bar{K}[x]$ and we give a description of the valuations $\bar{\mu}_i$ of $\bar{K}[x]$ which are the extensions of the valuations μ_i belonging to the admissible family associated with μ .

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	2
1. Rappels	3
2. Groupe des valeurs et algèbre graduée	8
3. Passage à la clôture algébrique	14
4. Restriction d'une valuation définie sur $\bar{K}[x]$	25
Annexe A. Suites pseudo-convergentes et extension immédiate	29
Références	33

Date: Mai 2020.

1991 Mathematics Subject Classification. 13A18 (12J10 14E15).

Key words and phrases. valuation, extension, famille admise, paire minimale.

* Partially supported by the grant of the Agence Nationale de la Recherche "CatAG" ANR-17-CE40-0014.

INTRODUCTION

Soit K un corps muni d'une valuation ν , nous pouvons obtenir toute valuation ou pseudo-valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ qui prolonge ν grâce à une famille admise de valuations $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$, où l'ensemble I est un ensemble totalement ordonné (cf. théorèmes 2.4 et 2.5 de [Va 1]). De plus chaque valuation μ_i de la famille est obtenue comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite associée à un polynôme-clé ou un polynôme-clé limite ϕ_i .

La famille $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ converge vers la valuation μ dans le sens où pour tout polynôme f de $K[x]$ la famille de valeurs $(\mu_i(f))_{i \in I}$ est croissante et vérifie $\mu(f) = \text{Sup}(\mu_i(f) ; i \in I)$. En particulier si la famille I a un plus grand élément \bar{i} la valuation μ est égale à la valuation $\mu_{\bar{i}}$ et il existe un polynôme $\phi = \phi_{\bar{i}}$ qui définit la valuation μ comme valuation augmentée ou valuation augmentée limite. Nous disons dans ce cas que la valuation est *bien spécifiée* et que le polynôme ϕ *définit* la valuation. Par définition ce polynôme apparaît dans la construction de la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ associée à la valuation μ .

Comme tout polynôme-clé ou polynôme-clé limite est un polynôme irréductible de $K[x]$ dans le cas où le corps K est algébriquement clos les seuls polynômes-clés sont de degré un et les familles admises sont particulièrement simples : si la valuation μ est bien spécifiée elle est définie par un polynôme-clé ϕ de la forme $\phi(x) = x - a$, sinon elle est définie par une famille infinie de polynômes (ϕ_α) de la forme $\phi_\alpha(x) = x - a_\alpha$. Plus précisément, comme K est algébriquement clos la valuation μ est entièrement déterminée par les valeurs prises pour les polynômes f de la forme $f(x) = (x - b)$, et nous avons dans le cas où μ est bien spécifiée $\mu(x - b) = \text{Inf}(\nu(a - b), \delta)$ et la valuation μ est associée à une *paire minimale*, et dans le cas d'une famille infinie la valuation μ est la valuation associée à la *famille pseudo-convergente* (a_α) (**Proposition 2.10**). Il est aussi possible de décrire une valuation μ de $K[x]$ par une boule fermée ou par une famille décroissante de boules fermées dans K pour la distance ultramétrique associée à la valuation ν de K (**Proposition 2.11**).

Soient (K, ν) un corps valué quelconque et μ une valuation de $K[x]$ prolongeant ν , alors si $\bar{\nu}$ est une extension de ν à la clôture algébrique \bar{K} de K il existe une extension $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$ qui prolonge $\bar{\nu}$. Soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ la famille admise associée à μ , nous voulons décrire les valuations $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$ obtenues comme prolongement des valuations μ_i appartenant à la famille \mathcal{A} , et les familles de boules fermées de \bar{K} associées aux valuations $\bar{\mu}_i$.

Dans le cas où (K, ν) est un corps valué hensélien nous associons à la famille admise associée à la valuation μ une famille décroissante $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ de réunions finies de boules fermées de \bar{K} . Plus précisément chaque \mathcal{B}_i est la réunion des boules disjointes $B_i^{(r)}$, le groupe de Galois agit transitivement sur l'ensemble fini $\{B_i^{(r)}\}$, et pour tout $i < j$ dans I chaque boule $B_i^{(r)}$ de \mathcal{B}_i contient s boules $B_j^{(l)}$ appartenant à \mathcal{B}_j , où s est un entier indépendant de la boule $B_i^{(r)}$ choisie, et toute boule $B_j^{(l)}$ de \mathcal{B}_j est contenue dans une boule $B_i^{(r)}$ de \mathcal{B}_i (**Proposition 3.18**).

L'intersection des \mathcal{B}_i est un sous-ensemble $\mathbf{B}(\mu)$ de \bar{K} , appelé *ensemble caractéristique de la valuation μ* , cet ensemble est vide dans le cas où la valuation μ n'est pas bien spécifiée, sinon

c'est la réunion d'un ensemble fini de boules fermées non vides de \bar{K} , qui correspondent aux différentes extensions de μ à $\bar{K}[x]$ (**Théorème 3.19**).

Dans la quatrième partie nous montrons comment à partir d'une valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ nous pouvons construire la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ associée à la restriction μ de $\bar{\mu}$ à $K[x]$. Plus précisément nous construisons une famille décroissante de boules fermées B_i de \bar{K} , telle que la valuation μ_i de la famille admise \mathcal{A} soit la restriction à $K[x]$ de la valuation $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$ définie par la boule B_i .

Alors que la construction de la famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ se fait de *manière croissante*, c'est-à-dire la valuation μ_i est construite à partir des valuations μ_j pour $j < i$, la construction des boules B_i , et par conséquent des valuations $\bar{\mu}_i$ se fait de *manière décroissante*, c'est-à-dire la boule B_i est construite à partir des boules B_j pour $j > i$ (**Théorème 4.6**).

Enfin dans l'annexe nous interprétons les résultats de Kaplansky sur les extensions immédiates et les suites pseudo-convergentes à partir des propriétés des familles admises continues que nous avons définies précédemment.

1. RAPPELS

Dans ce qui suit nous nous donnons une valuation ν sur un corps K et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ que nous considérons sont des prolongements de ν . Nous nous donnons aussi un groupe totalement ordonné $\tilde{\Gamma}$, contenant le groupe des ordres Γ_ν de la valuation ν , et toutes les valuations ou pseudo-valuations μ de $K[x]$ ont leur groupe des ordres Γ_μ qui est un sous-groupe ordonné de $\tilde{\Gamma}$.

Pour toute valuation μ de $K[x]$ nous pouvons définir la notion de *polynôme-clé* ϕ , et si ϕ est un polynôme-clé pour μ et si γ est un élément de $\tilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu(\phi)$, nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = [\mu ; \mu'(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante :

pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ , $f = g_m \phi^m + \dots + g_1 \phi + g_0$, où les polynômes g_j , $0 \leq j \leq m$, sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé ϕ , et nous avons :

$$\mu'(f) = \text{Inf}(\mu(g_j) + j\gamma ; 0 \leq j \leq m) .$$

Nous pouvons définir aussi pour tout polynôme unitaire ϕ de degré un, $\phi = x - b$, et pour toute valeur γ de $\tilde{\Gamma}$ une valuation μ de $K[x]$, que nous appelons encore *valuation augmentée* associée au polynôme-clé ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu = [\nu ; \mu(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante :

tout polynôme f de $K[x]$ s'écrit de manière unique sous la forme $f = a_d \phi^d + \dots + a_1 \phi + a_0$, avec $a_j \in K$, et nous posons

$$\mu(f) = \text{Inf}(\nu(a_j) + j\gamma ; 0 \leq j \leq d) .$$

Dans ce cas cette valuation μ est aussi notée $\omega_{(b,\gamma)}$ (cf. [A-P 1]).

Nous pouvons définir la notion de *famille de valuations augmentées itérées* comme une famille dénombrable $(\mu_i)_{i \in I}$ de valuations de $K[x]$, $I = \{1, \dots, n\}$ ou $I = \mathbb{N}^*$, associée à une famille de polynômes $(\phi_i)_{i \in I}$ et à une famille $(\gamma_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\tilde{\Gamma}$, telle que chaque valuation μ_i , $i > 1$,

est une valuation augmentée de la forme $\mu_i = [\mu_{i-1} ; \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$ et où la famille des polynômes-clés (ϕ_i) vérifie les deux propriétés suivantes : pour tout $i > 2$ nous avons $\deg\phi_i \geq \deg\phi_{i-1}$ et les polynômes ϕ_i et ϕ_{i-1} ne sont pas μ_{i-1} -équivalents. Nous renvoyons aux articles [McL 1], [McL 2], et [Va 1], pour les définitions et les propriétés des polynômes-clés, des valuations augmentées et des familles de valuations augmentées itérées.

Nous définissons aussi la notion de *famille admissible continue* comme une famille $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de valuations de $K[x]$, indexée par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, associée à la famille de polynômes-clés $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ et à la famille de valeurs $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$. Par définition chaque valuation μ_α est une valuation augmentée de la forme $\mu_\alpha = [\mu ; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, où μ est une valuation de $K[x]$ donnée, les polynômes-clés ϕ_α sont tous de même degré d et les valeurs γ_α forment une famille croissante sans plus grand élément dans $\tilde{\Gamma}$.

Nous définissons l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \tilde{\Phi}\left((\mu_\alpha)_{\alpha \in A}\right) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall \alpha < \beta \in A\},$$

nous supposons que cet ensemble est non vide, nous appelons $d_{\mathcal{C}}$ le degré minimal des polynômes appartenant à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ et nous supposons aussi que nous avons l'inégalité $d < d_{\mathcal{C}}$, alors nous définissons l'ensemble

$$\Phi(\mathcal{C}) = \Phi\left((\mu_\alpha)_{\alpha \in A}\right) = \{\phi \in \tilde{\Phi}(\mathcal{C}), \deg\phi = d_{\mathcal{C}} \text{ et } \phi \text{ unitaire}\}.$$

Un polynôme ϕ appartenant à $\Phi(\mathcal{C})$ est appelé un *polynôme-clé-limite* pour la famille \mathcal{C} , et pour ϕ un polynôme-clé limite et γ un élément de $\tilde{\Gamma}$ vérifiant $\gamma > \mu_\alpha(\phi)$ pour tout α dans A , nous pouvons définir une nouvelle valuation μ' de $K[x]$, appelée *valuation augmentée limite* pour \mathcal{C} associée au polynôme-clé limite ϕ et à la valeur γ que nous notons $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu'(\phi) = \gamma]$, de la manière suivante :

pour tout polynôme f de $K[x]$, nous écrivons le développement de f selon les puissances de ϕ , $f = g_m\phi^m + \dots + g_1\phi + g_0$, où les polynômes g_j , $0 \leq j \leq m$, sont de degré strictement inférieur au degré du polynôme-clé limite ϕ , et nous posons :

$$\mu'(f) = \text{Inf}(\mu_A(g_j) + j\gamma ; 0 \leq j \leq m),$$

où nous posons $\mu_A(g) = \text{Sup}(\mu_\alpha(g); \alpha \in A)$ pour tout g n'appartenant pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$. Nous renvoyons à [Va 1] pour les définitions précises et les propriétés des polynômes-clés limites et des valuations augmentées limites.

Remarque 1.1. Si nous prenons la valeur $\gamma = +\infty$, la valuation augmentée $\mu = [\nu ; \mu(\phi) = \gamma]$ associée à un polynôme-clé ϕ ou la valuation augmentée limite $\mu' = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu'(\phi) = \gamma]$ associée à un polynôme-clé limite ϕ est une pseudo-valuation de l'anneau $K[x]$ dont le noyau est l'idéal engendré par le polynôme ϕ .

Définition. Une famille admissible simple \mathcal{S} pour la valuation ν de K est une famille de valuations $(\mu_i)_{i \in I}$ de $K[x]$ constituée d'une partie discrète \mathcal{D} et d'une partie continue \mathcal{C} ,

- la partie discrète $\mathcal{D} = (\mu_l)_{l \in L}$ est une famille non vide de valuations augmentées itérées de $K[x]$ telle que la famille de polynômes-clés $(\phi_l)_{l \in L}$ associée vérifie l'inégalité stricte $\deg\phi_l > \deg\phi_{l-1}$.

- la partie continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille admissible continue éventuellement vide ; si elle est non vide la famille \mathcal{D} est finie, le degré d des polynômes-clé ϕ_α est égal au degré du dernier polynôme-clé ϕ_n de la famille $(\phi_l)_{l \in L}$ associée à \mathcal{D} , et pour tout α dans A , la valuation μ_α est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu_n ; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$.

Si la partie discrète \mathcal{D} d'une famille admise simple \mathcal{S} est constituée d'une seule valuation μ_1 , et si la partie continue \mathcal{C} est non vide, nous pouvons toujours considérer que la valuation μ_1 appartient à la famille \mathcal{C} , nous écrivons $\mathcal{S} = \mathcal{C}$ et nous disons alors que la famille simple \mathcal{S} est continue.

Définition. Une famille admissible \mathcal{A} pour la valuation ν de K est une famille de valuations $(\mu_i)_{i \in I}$ de $K[x]$, obtenue comme réunion de familles admissibles simples

$$\mathcal{A} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{S}^{(j)} = \bigcup_{j \in J} (\mathcal{D}^{(j)}; \mathcal{C}^{(j)}) ,$$

où J est un ensemble dénombrable, $J = \{1, \dots, N\}$ ou $J = \mathbb{N}^*$, et nous définissons J^* par $J^* = \{1, \dots, N-1\}$ si J est fini et par $J^* = J = \mathbb{N}^*$ sinon, vérifiant :

- pour j appartenant à J^* , la partie discrète $\mathcal{D}^{(j)} = (\mu_l^{(j)})_{l \in L^{(j)}}$ est finie, la partie continue $\mathcal{C}^{(j)} = (\mu_\alpha^{(j)})_{\alpha \in A^{(j)}}$ est non vide et la première valuation $\mu_1^{(j+1)}$ de la famille simple $\mathcal{S}^{(j+1)}$ est une valuation augmentée limite pour la famille admissible continue $\mathcal{C}^{(j)}$;

- la première valuation $\mu_1^{(1)}$ de la famille est la valuation associée à un polynôme unitaire de degré un, $\phi_1^{(1)} = x - a$, et à une valeur $\gamma_1^{(1)}$, $\mu_1^{(1)} = [\nu ; \mu_1^{(1)}(\phi_1^{(1)}) = \gamma_1^{(1)}] = \omega_{(a, \gamma_1^{(1)})}$.

Dans la suite, comme la valuation ν de K est fixée nous dirons simplement que \mathcal{A} est une famille admissible de valuations de $K[x]$.

Nous pouvons aussi écrire la famille admissible \mathcal{A} comme une famille indexée par un ensemble totalement ordonné I ,

$$\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I} ,$$

et l'ensemble I peut être décrit de la manière suivante : pour tout j dans J , nous munissons l'ensemble $B^{(j)} = L^{(j)} \sqcup A^{(j)}$ de l'ordre total induit par les ordres sur $L^{(j)}$ et sur $A^{(j)}$ et défini par $l < \alpha$ pour tout $l \in L^{(j)}$ et tout $\alpha \in A^{(j)}$; et nous posons

$$I = \{(j, b) \mid j \in J \text{ et } b \in B^{(j)}\} ,$$

muni de l'ordre lexicographique. L'ordre sur l'ensemble I peut être caractérisé par la relation suivante : $i < k$ dans I si et seulement si pour tout polynôme f de $K[x]$ nous avons $\mu_i(f) \leq \mu_k(f)$ et il existe au moins un polynôme g avec $\mu_i(g) < \mu_k(g)$.

La première valuation μ_1 de la famille \mathcal{A} est obtenue à partir de la valuation ν de K grâce à un polynôme ϕ_1 unitaire de degré un et à une valeur γ_1 . Nous considérerons parfois que la valuation $\nu = \mu_0$ appartient à la famille \mathcal{A} et par abus de notation nous considérerons que 0 est le plus petit élément de l'ensemble I . La valuation μ_1 est ainsi considérée comme une valuation augmentée, définie par le polynôme ϕ_1 .

A toute famille admissible \mathcal{A} nous associons la famille des polynômes-clés ou polynômes-clés limites $(\phi_i)_{i \in I}$, que nous appelons pour simplifier la famille des polynômes-clés, et la famille des valeurs $(\gamma_i)_{i \in I}$.

Définition. Une famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est une famille admise si pour tout polynôme f dans $K[x]$ la famille $(\mu_i(f))_{i \in I}$ admet un plus grand élément dans le groupe Γ .

Définition. Une famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ de valuations de $K[x]$ est dite complète si l'ensemble I possède un plus grand élément \bar{i} , sinon la famille admissible \mathcal{A} est dite ouverte.

Remarque 1.2. Une famille admissible \mathcal{A} est complète uniquement dans le cas où \mathcal{A} est réunion d'un nombre fini de familles simples et où la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est discrète finie, $\mathcal{S}^{(N)} = (\mu_1^{(N)}, \dots, \mu_{n_N}^{(N)})$.

Dans ce cas la famille \mathcal{A} est admise et la dernière valuation $\mu_{\bar{i}} = \mu_{n_N}^{(N)}$ de la famille peut être une pseudo-valuation de $K[x]$.

Remarque 1.3. Si la famille admissible $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est ouverte, elle est admise si pour tout polynôme f il existe $i \in I$ tel que $\mu_i(f) = \mu_j(f)$ pour tout $j \geq i$. C'est le cas si la famille \mathcal{A} est réunion infinie de familles admissibles simples, ou si la famille \mathcal{A} est réunion de N familles admissibles simples $\mathcal{A} = \mathcal{S}^{(1)} \cup \dots \cup \mathcal{S}^{(N)}$, telle que la dernière famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est une famille discrète infinie, c'est-à-dire $\mathcal{S}^{(N)} = (\mu_l^{(N)})_{l \in L^{(N)}}$ avec $L^{(N)}$ infini, ou enfin si la famille simple $\mathcal{S}^{(N)}$ est de la forme $\mathcal{S}^{(N)} = ((\mu_l^{(N)})_{l \in L^{(N)}}; (\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha \in A^{(N)}})$, avec $\tilde{\Phi}((\mu_\alpha^{(N)})_{\alpha \in A^{(N)}}) = \emptyset$, c'est-à-dire telle que pour tout f dans $K[x]$ il existe $\alpha < \beta$ dans $A^{(N)}$ avec $\mu_\alpha^{(N)}(f) = \mu_\beta^{(N)}(f)$.

Définition. La famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ converge vers la valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ définie pour tout polynôme f par

$$\mu(f) = \text{Sup}(\mu_i(f) ; i \in I) .$$

Si l'ensemble I admet un plus grand élément \bar{i} , la limite de la famille est la valuation ou pseudo-valuation $\mu_{\bar{i}}$, sinon la limite est une valuation définie par $\mu(f) = \mu_i(f)$ pour i assez grand dans I .

Nous avons une réciproque au résultat précédent.

Théorème 1.4. (Théorèmes 2.4. et 2.5. de [Va 1]) Soit μ une valuation ou pseudo-valuation de $K[x]$ prolongeant une valuation ν de K , alors il existe une famille admise de valuations de $K[x]$, notée $\mathcal{A}(\mu)$ et appelée famille admise associée à la valuation μ qui converge vers μ .

Remarque 1.5. La famille admise associée à une valuation μ n'est pas unique, mais est déterminée à équivalence près, où deux familles admissibles $\mathcal{A} = \bigcup_{j \in J} \mathcal{S}^{(j)}$ et $\mathcal{A}' = \bigcup_{j \in J'} \mathcal{S}'^{(j)}$ sont dites équivalentes si $J = J'$, si les familles discrètes $\mathcal{D}^{(j)} = (\mu_i^{(j)})_{1 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{D}'^{(j)} = (\mu'_i{}^{(j)})_{1 \leq i \leq n'}$ coïncident jusqu'à l'avant-dernière valuation, c'est-à-dire quand $n = n'$ et $\mu_i^{(j)} = \mu'_i{}^{(j)}$ pour tout i , $1 \leq i \leq n - 1$, et si les sous-familles continues $\mathcal{C}^{(j)}$ et $\mathcal{C}'^{(j)}$ coïncident asymptotiquement. (cf. Proposition 2.9. de [Va 2])

Définition. Une valuation μ de $K[x]$ est dite bien spécifiée si la famille admise $\mathcal{A}(\mu)$ associée est complète. Dans ce cas la valuation μ est la dernière valuation $\mu_{\bar{\iota}}$ de la famille $\mathcal{A}(\mu) = (\mu_i)_{i \in I}$.

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 1.6. (Proposition 1.4 de [Va 3]) Les propositions suivantes sont équivalentes :

- 1) La valuation μ est bien spécifiée.
- 2) La valuation μ n'est pas maximale pour la relation d'ordre \leq .
- 3) La valuation μ admet un polynôme-clé.
- 4) La valuation μ peut être obtenue comme valuation augmentée

$$\mu = [\mu_0 ; \mu(\phi) = \gamma],$$

ou comme valuation augmentée limite

$$\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma].$$

Si μ est une valuation bien spécifiée, nous disons que le polynôme $\phi_{\bar{\iota}}$ apparaissant comme dernier polynôme de la famille $(\phi_i)_{i \in I}$ définit la valuation ou pseudo-valuation μ . Si μ est obtenue comme valuation augmentée $\mu = [\mu_0 ; \mu(\phi) = \gamma]$, ou comme valuation augmentée limite, $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$, nous pouvons en particulier choisir $\phi_{\bar{\iota}} = \phi$.

Soit μ une valuation ou une pseudo-valuation de $K[x]$, alors toute valuation μ_i d'une famille admissible associée à μ est une valuation bien spécifiée, définie par le polynôme ϕ_i .

Pour toute valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$, les valuations μ_i appartenant à une famille admise associée à μ sont définies de manière essentiellement unique (cf. remarque 1.5), en particulier quand μ est bien spécifiée, si μ est une valuation augmentée, $\mu = [\mu_0 ; \mu(\phi) = \gamma]$, la valuation μ_0 est définie de manière unique, et si μ est une valuation augmentée limite, $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$, la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est bien définie *asymptotiquement*.

Dans la suite nous noterons alors

$$\mu = [\mu_{\sharp} ; \mu(\phi) = \gamma],$$

où μ_{\sharp} est la valuation μ_0 , resp. une famille continue de valuations $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, et où ϕ est un polynôme-clé, resp. un polynôme-clé limite, pour μ_{\sharp} . En général le polynôme ϕ n'est pas défini de manière unique, en fait les polynômes ϕ et ψ définissent la même valuation μ si et seulement si ce sont des polynômes unitaires de même degré vérifiant $\mu_{\sharp}(\phi - \psi) \geq \gamma$, où nous posons $\mu_{\sharp}(f) = \mu_A(f) = \text{Sup}(\mu_\alpha(f); \alpha \in A)$ dans le cas où μ_{\sharp} est la famille $(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ ([Va 2]).

Remarque 1.7. Comme un polynôme-clé est irréductible, dans le cas où le corps \bar{K} est algébriquement clos, une valuation bien spécifiée μ est de la forme

$$\mu = [\nu ; \mu(\phi) = \delta],$$

avec $\phi(x) = x - a$. Cela correspond à la valuation associée à la paire minimale (a, δ) notée $\omega_{(a, \delta)}$ définie dans [A-P 1].

2. GROUPE DES VALEURS ET ALGÈBRE GRADUÉE

Soit μ une valuation sur un corps K de groupe des valeurs Γ_μ , pour tout sous-anneau A de K et pour tout γ dans $\bar{\Gamma}_\mu = \Gamma_\mu \cup \{+\infty\}$, nous définissons les groupes $\mathcal{P}_\gamma(A) = \{x \in A \mid \mu(x) \geq \gamma\}$ et $\mathcal{P}_\gamma^+(A) = \{x \in A \mid \mu(x) > \gamma\}$, et l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu A$ associée à la valuation μ par :

$$\text{gr}_\mu A = \bigoplus_{\gamma \in \bar{\Gamma}} \mathcal{P}_\gamma(A) / \mathcal{P}_\gamma^+(A) .$$

Nous notons H_μ l'application de A dans $\text{gr}_\mu A$ qui à tout élément x de A avec $\mu(x) = \gamma$ associe l'image de x dans $\mathcal{P}_\gamma(A) / \mathcal{P}_\gamma^+(A)$, et nous notons $\Delta_\mu(A)$ la partie homogène de degré 0, $\Delta_\mu(A) = \mathcal{P}_0(A) / \mathcal{P}_0^+(A)$.

En particulier pour $A = K$ les groupes $\mathcal{P}_0(K)$ et $\mathcal{P}_0^+(K)$ sont respectivement l'anneau V_μ de la valuation et son idéal maximal, $\Delta_\mu(K)$ est égal à son corps résiduel κ_μ et l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K$ est *simple*, i.e. tout élément homogène non nul admet un inverse. Plus généralement si K est le corps des fractions de A , l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K$ est l'algèbre graduée simple engendrée par $\text{gr}_\mu A$ et le corps résiduel κ_μ est le corps des fractions de l'anneau $\Delta_\mu(A)$.

Soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ une famille admissible de valuations, et pour tout $i \in I$ nous appelons Γ_{μ_i} le groupe des ordres de la valuation μ_i .

Si μ_k et μ_l sont deux valuations appartenant à la même sous-famille simple \mathcal{S} de la famille \mathcal{A} telles que μ_l est obtenue comme valuation augmentée $\mu_l = [\mu_k ; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, nous disons que (μ_k, μ_l) forment *un couple de valuations successives* de la famille. Le groupe des ordres Γ_{μ_l} de la valuation μ_l est égal à $\Gamma_{\mu_l} = \Gamma_{\mu_k} \oplus \mathbb{Z}\gamma_l$, d'où l'égalité

$$[\Gamma_l : \Gamma_k] = \tau_l$$

où τ_l est le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_l$ appartienne à Γ_{μ_k} si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, et où τ_l est $+\infty$ sinon. Remarquons que la valuation μ_l admet un polynôme-clé qui n'est pas μ_l -équivalent au polynôme ϕ_l si et seulement si la valeur γ_l appartient au groupe $\Gamma_k \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, en particulier si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_l} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ la valuation μ_l est la dernière valuation de la famille admissible \mathcal{A} .

Comme les valuations μ_k et μ_l vérifient $\mu_k(f) \leq \mu_l(f)$ pour tout f dans $K[x]$ nous avons une application naturelle $g: \text{gr}_{\mu_k} K[x] \rightarrow \text{gr}_{\mu_l} K[x]$, et celle-ci induit un isomorphisme

$$G: (\text{gr}_{\mu_k} K[x] / (H_{\mu_k}(\phi_l)))[T] \longrightarrow \text{gr}_{\mu_l} K[x] ,$$

qui envoie T sur $G(T) = H_{\mu_l}(\phi_l)$ (cf. [Va 1]).

Rappelons qu'il existe q_k et q'_k dans $K[x]$ vérifiant $q_k q'_k$ μ_k -équivalent à 1 et $\mu_k(q_k) = -\mu_k(q'_k) = \mu_k(\phi_l)$, et nous posons $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_k \phi_l)$. De plus si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, il existe p_l et p'_l vérifiant $p_l p'_l$ μ_l -équivalent à 1 et $\mu_l(p_l) = -\mu_l(p'_l) = \tau_l \gamma_l$ (cf. [Va 3]). Alors le noyau de la composante de degré 0 de l'application g , $g_0: \Delta_{\mu_k} \rightarrow \Delta_{\mu_l}$, est l'idéal engendré par φ_l , et nous avons :

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$(\Delta_{\mu_k} / (\varphi_l)) \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_l} ,$$

- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$(\Delta_{\mu_k} / (\varphi_l))[S_l] \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_l} ,$$

avec $S_l = H_{\mu_l}(p'_l \phi_l^{\tau_l})$ (cf. [Va 1] Remarque 1.5).

Si μ_l est la valuation augmentée limite d'une famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, associée au polynôme clé-limite ϕ_l , $\mu_l = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, nous définissons l'algèbre graduée $\mathbf{gr}_{\mathbf{A}} = \text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]/(H_{\mu_\alpha}(\phi_\beta))$ qui ne dépend pas du couple $\alpha < \beta$ dans A , et l'application naturelle de $\text{gr}_{\mu_\alpha} K[x]$ dans $\text{gr}_{\mu_l} K[x]$ induit un isomorphisme d'algèbres graduées :

$$Q: \mathbf{gr}_{\mathbf{A}}[T] \xrightarrow{\sim} \text{gr}_{\mu_l} K[x],$$

qui envoie T sur $Q(T) = H_{\mu_l}(\phi_l)$. Nous appelons $\Delta_{\mathbf{A}}$ la composante de degré 0 de $\mathbf{gr}_{\mathbf{A}}$, cet anneau est isomorphe à $\Delta_{\mu_\beta}/(\varphi_\alpha)$ où (μ_α, μ_β) est un couple de valuations successives de \mathcal{A} appartenant à \mathcal{C} , avec $\varphi_\alpha = H_{\mu_\alpha}(q'_\alpha \phi_\beta)$.

Tous les groupes de valuation Γ_{μ_α} sont égaux et nous notons ce groupe $\Gamma_{\mathbf{A}}$. Pour tout γ dans $\Gamma_{\mathbf{A}}$ il existe p et $p' = p'(\gamma)$ dans $K[x]$ vérifiant $pp'(\gamma) \underset{\mu_\alpha}{\sim} 1$ et $\mu_\alpha(p) = -\mu_\alpha(p'(\gamma)) = \gamma$, pour $\alpha \in A$.

De plus si γ_l appartient à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et si nous appelons comme précédemment τ_l le plus petit entier $t > 0$ tel que $t\gamma_l$ appartienne à $\Gamma_{\mathbf{A}}$ il existe p et p' dans $K[x]$ tels que pp' soit μ_α -équivalent à 1 pour α suffisamment grand et tels que $\mu_\alpha(p') = -\tau_l \gamma_l$ (cf. [Va 3] Proposition 2.2).

Alors le morphisme Q induit un isomorphisme en degré 0 :

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0: \Delta_{\mathbf{A}} \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_l},$$

- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$Q_0: \Delta_{\mathbf{A}}[S] \xrightarrow{\sim} \Delta_{\mu_l},$$

qui envoie S sur $H_{\mu_l}(p'_l \phi_l^{\tau_l})$.

Remarque 2.1. Soit μ_l une valuation de la famille \mathcal{A} , nous notons $\Gamma_{\#}$ le groupe des ordres Γ_{μ_k} de la valuation μ_k si μ_l est obtenue comme valuation augmentée, $\mu_l = [\mu_k ; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$, ou le groupe des ordres $\Gamma_{\mathbf{A}}$ si la valuation μ_l est obtenue comme valuation augmentée limite, $\mu_l = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu_l(\phi_l) = \gamma_l]$.

Si μ_l n'est pas la dernière valuation de la famille \mathcal{A} , il existe une valuation μ_m telle que (μ_l, μ_m) est un couple de valuations successives, et nous écrivons le polynôme-clé ϕ_m sous la forme $\phi_m = \phi_l^{\tau_l} + \dots + g_0$, nous avons $r_l \gamma_l \in \Gamma_{\#}$, en particulier γ_l appartient à $\Gamma_{\#} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ et nous pouvons définir l'entier s_l par $r_l = \tau_l s_l$.

Proposition 2.2. Il existe une famille croissante de corps $(F_k)_{k \in I^*}$, avec F_0 égal au corps résiduel κ_ν de la valuation ν de K , telle que pour tout couple (μ_k, μ_l) de valuations successives de \mathcal{A} nous avons :

- si γ_l appartient à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu_l} = F_k[S_l], \quad \text{avec } S_l = H_{\mu_l}(p'_l \phi_l^{\tau_l});$$

- si γ_l n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_k} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$$\Delta_{\mu_l} = F_k.$$

De plus si l appartient à I^* , F_l est un extension finie de F_k de degré s_l , et pour l tel que la valuation μ_l appartienne à une famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$, le corps F_l est isomorphe à $\Delta_{\mathbf{A}}$.

En particulier tous les corps F_l sont des extensions algébriques du corps résiduel κ_ν , et si la famille \mathcal{A} est constituée d'un nombre fini de sous-familles simples, tous les corps F_l sont des extensions finies de κ_ν .

Preuve. La proposition est une généralisation du résultat de MacLane (cf. [McL 1] Theorem 12.1 et [Va 1] Théorème 1.12) et se démontre par récurrence (cf. [Va 3]).

□

Remarque 2.3. Nous avons montré de plus que si μ_k est la première valuation $\mu_1^{(j)}$ d'une sous-famille simple $\mathcal{S}^{(j)}$, et si nous notons $F_0^{(j)}$ le corps tel que Δ_{μ_k} soit égal à $F_0^{(j)}[S]$, alors F_k est une extension algébrique finie de $F_0^{(j)}$ de degré s_k . En effet nous avons $S = H_{\mu_k}(p'_k \phi_k^{\tau_k})$ et le corps F_k est égal à $\Delta_{\mu_k}/(\varphi_l)$ où $\varphi_l = H_{\mu_k}(q'_l \phi_l)$ avec $\phi_l = \phi_k^{\tau_k s_k} + \dots + g_0$.

Proposition 2.4. (Proposition 2.3 de [Va 3]) Soit μ une valuation de l'anneau des polynômes $K[x]$, alors l'algèbre graduée associée $\text{gr}_\mu K[x]$ est de la forme suivante :

i) si la valuation μ n'est pas bien spécifiée

$$\text{gr}_\mu K[x] = G^{(0)},$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple, c'est-à-dire telle que tout élément homogène non nul admette un inverse ;

ii) si la valuation μ est bien spécifiée

$$\text{gr}_\mu K[x] = G^{(0)}[T],$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple et T est l'image $H_\mu(\phi)$ du polynôme ϕ définissant la valuation μ .

De plus un élément homogène ψ de $\text{gr}_\mu K[x]$ est irréductible si et seulement si il existe f polynôme-clé pour la valuation μ dans $K[x]$ et ε élément homogène inversible de $\text{gr}_\mu K[x]$ tels que $\varepsilon\psi$ soit égal à l'image $H_\mu(f)$ de f dans $\text{gr}_\mu K[x]$.

Proposition 2.5. La valuation μ de $K[x]$ est bien spécifiée si et seulement si l'extension $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ de corps valués vérifie l'égalité d'Abhyankar :

$$\dim.\text{alg.}_K K(x) = \dim.\text{alg.}_{\kappa_\nu} \kappa_\mu + \text{rang.rat.} \Gamma_\mu / \Gamma_\nu = 1.$$

Preuve. Rappelons que le corps résiduel κ_μ est égal au corps des fractions de la partie homogène de degré 0, Δ_μ de l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K[x]$.

Dans le cas où la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée, $\mu = [\mu_\# ; \mu(\phi) = \gamma]$, l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K[x]$ est de la forme $G^{(0)}[T]$ où l'algèbre simple $G^{(0)}$ est isomorphe à l'algèbre quotient $\text{gr}_{\mu_\#} K[x]/(H_{\mu_\#}(\phi))$ et où $T = H_\mu(\phi)$.

Si γ n'appartient pas à $\Gamma_{\mu_\#} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène de degré 0, Δ_μ , est isomorphe à $\Delta_{\mu_\#}/(\varphi_\#)$, c'est-à-dire au corps $F_{\mu_\#}$, nous en déduisons que le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est isomorphe à $F_{\mu_\#}$, par conséquent est une extension algébrique finie du corps résiduel κ_ν .

Si γ appartient à $\Gamma_{\mu_{\sharp}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène de degré 0, Δ_{μ} , est isomorphe à $\Delta_{\mu_{\sharp}}/(\varphi_{\sharp})[S]$, avec $S = H_{\mu}(p'\phi^{\tau})$ où τ est égal à $[\Gamma_{\mu} : \Gamma_{\nu}]$, et le corps résiduel κ_{μ} de la valuation μ est isomorphe à $F_{\sharp}(S)$, par conséquent est une extension transcendante de degré 1 du corps résiduel κ_{ν} .

Dans le cas où la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée limite, $\mu = [(\mu_{\alpha}) ; \mu(\phi) = \gamma]$, nous avons un résultat analogue.

Si γ n'appartient pas à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène Δ_{μ} est isomorphe à $\Delta_{\mathbf{A}}$, le corps résiduel κ_{μ} de la valuation μ est isomorphe au corps $\Delta_{\mathbf{A}}$ et est donc une extension algébrique finie du corps résiduel κ_{ν} .

Si γ appartient à $\Gamma_{\mathbf{A}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$, la partie homogène Δ_{μ} est isomorphe à $\Delta_{\mathbf{A}}[S]$, avec $S = H_{\mu_{\alpha}}(p'\phi^{\tau})$ où τ est égal à $[\Gamma_{\mu} : \Gamma_{\mathbf{A}}]$, et le corps résiduel κ_{μ} de la valuation μ est isomorphe à $\Delta_{\mathbf{A}}(S)$, par conséquent est une extension transcendante de degré 1 du corps résiduel κ_{ν} .

Si la valuation μ n'est pas bien spécifiée, chacune des valuations μ_l de la famille admise \mathcal{A} associée à la valuation μ a un groupe des ordres Γ_{μ_l} qui est une extension finie du groupe Γ_{ν} , donc le groupe Γ_{μ} , réunion des groupes Γ_{μ_l} a même rang rationnel que le groupe Γ_{ν} .

Le corps résiduel κ_{μ} est la réunion des corps F_l , extensions finies de κ_{ν} , donc une extension algébrique du corps résiduel κ_{ν} . \square

Nous pouvons déduire de ce qui précède le résultat suivant, qui répond à une question posée par Nagata (cf. [Na]) et a été résolue par J. Ohm ([Oh]). Rappelons que nous disons qu'une extension de corps l/k est *réglée* s'il existe $k \subset k_1 \subset l$ avec l/k_1 extension transcendante pure de degré 1 et k_1/k extension algébrique finie.

Corollaire 2.6. (**The ruled residue conjecture**) *Soit $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ une extension de corps valués, alors le corps résiduel κ_{μ} est une extension algébrique ou réglée du corps résiduel κ_{ν} .*

Le rang $rg(\mu)$ de la valuation μ est compris entre $rg(\nu)$ et $rg(\nu) + 1$, la valuation μ a le même rang que la valuation ν si γ appartient au groupe $\Gamma_{\nu} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, sinon la valeur γ appartient à un groupe totalement ordonné $\tilde{\Gamma}$ qui contient Γ_{ν} comme sous groupe isolé et γ vérifie $\gamma > \delta$ pour tout δ dans Γ_{ν} .

Dans ce dernier cas la valuation μ est essentiellement unique, c'est-à-dire que si nous nous donnons un polynôme ϕ qui est polynôme-clé pour une valuation μ_{\sharp} ou polynôme-clé limite pour une famille de valuation $(\mu_{\alpha})_{\alpha \in A}$, la valuation bien spécifiée μ définie par le polynôme ϕ et la valeur γ est indépendante à équivalence près de la valeur γ choisie dans $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma_{\nu}$.

De plus le polynôme ϕ qui définit une valuation μ de rang $rg(\mu) = rg(\nu) + 1$ est unique. En effet si deux polynômes ϕ et ψ définissent la même valuation μ comme valuation augmentée ou comme valuation augmentée limite avec la valeur γ , nous avons l'inégalité $\mu(\psi - \phi) \geq \gamma$.

Remarque 2.7. *Si nous prenons $\gamma = +\infty$ nous trouvons une pseudo-valuation de $K[x]$ dont le noyau est égal à l'idéal engendré par ϕ . Il y a une bijection entre l'ensemble des valuations μ de $K[x]$ de rang $rg(\mu) = rg(\nu) + 1$ et l'ensemble des pseudo-valuations de $K[x]$ de noyau non trivial, et l'étude des valuations de rang $rg(\mu) = rg(\nu) + 1$ définies par le polynôme ϕ est équivalente à l'étude des pseudo-valuations de noyau (ϕ) , c'est-à-dire à l'étude des valuations de l'extension $L = K[x]/(\phi)$ de K qui prolongent ν .*

Proposition 2.8. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par le polynôme ϕ , et soit $\text{gr}_\mu K[x] = G^{(0)}[T]$ l'algèbre graduée associée avec $T = H_\mu(\phi)$, alors si ψ est un autre polynôme qui définit la valuation μ nous avons $S = H_\mu(\psi)$ qui est égal à T ou à $T - h$ avec $h \in G^{(0)}$ de valuation $\mu(h) = \mu(\phi) = \mu(\psi)$.*

Réciproquement tout générateur homogène S de l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu K[x]$ sur l'algèbre simple $G^{(0)}$ est de la forme $S = T - h$ avec $h \in G^{(0)}$ de degré $\mu(h) = \mu(\phi) = \mu(\psi)$, et il existe un polynôme ψ dans $K[x]$ qui définit la valuation μ avec $H_\mu(\psi) = S$.

Preuve. Si la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée $\mu = [\mu' ; \mu(\phi) = \gamma]$ c'est une conséquence du résultat suivant :

deux valuations augmentées μ_1 et μ_2 d'une même valuation μ définies respectivement par des polynômes-clés ϕ_1 et ϕ_2 et des valeurs γ_1 et γ_2 sont égales si et seulement si $\gamma_1 = \gamma_2$ et si les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 ont même degré et vérifient $\mu(\phi_1 - \phi_2) \geq \gamma_1$ (Proposition 1.2. de [Va 2]).

Si la valuation μ est obtenue comme valuation augmentée limite $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$ c'est une conséquence du résultat analogue :

deux valuations augmentées limites μ_1 et μ_2 d'une même famille admissible continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ définies respectivement par des polynômes-clés limites ϕ_1 et ϕ_2 et des valeurs γ_1 et γ_2 sont égales si et seulement si $\gamma_1 = \gamma_2$ et si les polynômes ϕ_1 et ϕ_2 ont même degré et vérifient $\mu_A(\phi_1 - \phi_2) \geq \gamma_1$ (Proposition 1.4. de [Va 2]). \square

Nous rappelons aussi le résultat suivant, qui est une conséquence de la proposition précédente, mais qui peut se démontrer aussi directement à partir des propositions 1.2 et 1.4 de [Va 2].

Proposition 2.9. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par le polynôme ϕ , et soit ψ un polynôme unitaire de $K[x]$ vérifiant $\deg \psi = \deg \phi$ et $\mu(\psi) = \mu(\phi)$, alors le polynôme ψ définit la valuation μ .*

\square

Dans la suite de ce paragraphe nous allons supposer que le corps K est algébriquement clos, alors pour toute valuation ν de K le corps résiduel κ_ν est aussi algébriquement clos et le groupe des valeurs Γ_ν est divisible. De plus dans le cas où K est algébriquement clos, les éléments irréductibles de l'anneau $K[x]$ sont les polynômes de degré 1, nous en déduisons que toute valuation μ de $K[x]$ est définie entièrement par les valeurs $\mu(x - b)$, pour $b \in K$, et que tout polynôme f de degré plus grand que 2 ne peut pas être un polynôme-clé ou un polynôme-clé limite.

Nous rappelons que pour tout corps L , pour trouver la famille admise \mathcal{A} associée à une valuation μ de $L[x]$ le premier pas est de considérer l'ensemble $\Lambda_\mu = \{\mu(x - b) \mid b \in L\}$. Si cet ensemble a un plus grand élément δ nous choisissons un polynôme $\phi = x - a$ pour lequel cette valeur est atteinte et la première valuation μ_1 de la famille est la valuation associée, c'est-à-dire la valuation $\mu_1 = \omega_{(a, \delta)}$. Alors soit la valuation μ_1 est la valuation μ cherchée, soit il existe un polynôme-clé ϕ pour la valuation μ_1 dans $L[x]$ de degré strictement supérieur à 1.

Si l'ensemble Λ_μ n'a pas de plus grand élément nous trouvons un sous-ensemble $\{\delta_\alpha; \alpha \in A\}$ cofinal dans Λ_μ , indexé par un ensemble totalement ordonné A , sans plus grand élément, avec $\delta_\alpha < \delta_\beta$ pour $\alpha < \beta$, et pour tout $\alpha \in A$ nous choisissons un polynôme $\phi_\alpha = x - a_\alpha$ vérifiant $\mu(\phi_\alpha) = \delta_\alpha$. Alors la famille \mathcal{C} de valuation définie par $\mathcal{C} = (\omega_{(a_\alpha, \delta_\alpha)})_{\alpha \in A}$ est une famille continue

de valuations de $L[x]$. Pour tout $\alpha < \beta$ dans A nous avons $\nu(a_\beta - a_\alpha) = \gamma_\alpha$, en particulier la famille $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ vérifie

$$\nu(a_\tau - a_\sigma) > \nu(a_\sigma - a_\rho)$$

pour tous $\tau > \sigma > \rho$ dans A , et nous retrouvons la définition d'Ostrowski de *famille pseudo-convergente* ([Os], [Ka]). De plus si cette famille admet un polynôme-clé limite celui-ci est de degré strictement supérieur à 1.

Nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 2.10. *Supposons que le corps K est algébriquement clos, alors une valuation μ de $K[x]$ est soit une valuation de la forme $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, soit une valuation associée à une famille pseudo-convergente.*

Preuve. Comme il ne peut pas exister de polynôme-clé ou polynôme-clé limite de degré strictement plus grand que 1, soit l'ensemble $\Lambda_\mu = \{\mu(x - b) \mid b \in K\}$ a un plus grand élément δ , la valuation μ est bien spécifiée et est de la forme $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, soit l'ensemble Λ_μ n'a pas de plus grand élément, la valuation μ n'est pas bien spécifiée et elle est associée à la famille pseudo-convergente $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$. □

En particulier si la valuation μ n'est pas bien spécifiée, le corps résiduel κ_μ de la valuation μ est égal au corps résiduel κ_ν de la valuation ν et le groupe des ordres Γ_μ est égal au groupe des ordres Γ_ν , et nous en déduisons que l'extension de corps valués $(K(x), \mu)/(K, \nu)$ est *immédiate* (cf. [Ka]). Nous étudions dans l'**Annexe A** le lien entre les résultats de Kaplansky sur les extensions immédiates et la présentation des extensions de valuations à partir des familles admissibles.

Dans le cas où le corps K est algébriquement clos, pour décrire toutes les valuations de $K[x]$ prolongeant la valuation ν de K , nous munissons K de la distance ultramétrique associée à ν . Pour tout $a \in K$ et tout $\delta \in \Gamma$ nous définissons les boules fermée B et ouverte B° de centre a et de rayon δ respectivement par

$$\begin{aligned} B &= B(a, \delta) = \{c \in K \mid \nu(a - c) \geq \delta\}, \\ B^\circ &= B^\circ(a, \delta) = \{c \in K \mid \nu(a - c) > \delta\}. \end{aligned}$$

Comme la distance définie par la valuation ν est ultramétrique tout élément appartenant à une boule ouverte ou fermée est son centre, plus précisément si $b \in B^\circ(a, \delta)$, resp. $b \in B(a, \delta)$, alors $B^\circ(a, \delta) = B^\circ(b, \delta)$, resp. $B(a, \delta) = B(b, \delta)$.

Proposition 2.11. *Toute boule fermée $B = B(a, \delta)$ définit une valuation bien spécifiée μ de $K[x]$ par $\mu = \omega_{(a,\delta)}$, qui ne dépend pas du centre a , et toute valuation bien spécifiée μ est de cette forme.*

À toute valuation μ qui n'est pas bien spécifiée, on peut associer une famille décroissante $(B_\alpha = B(a_\alpha, \delta_\alpha))_{\alpha \in A}$ de boules fermées, où A est un ensemble totalement ordonné sans plus grand élément, dont l'intersection $\bigcap_\alpha B_\alpha$ est vide, telle que la valuation μ est définie par

$$\mu(x - c) = \text{Sup}(\nu(c - a_\alpha) ; \alpha \in A) .$$

Preuve. La première partie concernant les valuations bien spécifiées μ est une conséquence directe de ce qui précède.

Pour une valuation qui n'est pas bien spécifiée μ il reste à vérifier que l'intersection $\bigcap_{\alpha} B_{\alpha}$ est vide. En effet la valuation μ est définie par une famille continue $\mathcal{C} = (\omega_{(a_{\alpha}, \delta_{\alpha})})_{\alpha \in A}$, et par hypothèse pour tout $c \in K$ il existe $\alpha \in A$ tel que $\mu(x-c) < \mu(x-a_{\alpha}) = \delta_{\alpha}$, d'où $\nu(a_{\alpha}-c) < \delta_{\alpha}$. \square

Remarque 2.12. Si μ_1 et μ_2 sont deux valuations bien spécifiées de $K[x]$ définies respectivement par $\mu_1 = \omega_{(a_1, \delta_1)}$ et $\mu_2 = \omega_{(a_2, \delta_2)}$, nous avons $\mu_1 \leq \mu_2$ si et seulement si $\delta_1 \leq \delta_2$ et $\delta_1 \leq \nu(a_1 - a_2)$, c'est-à-dire si et seulement si $B(a_2, \delta_2) \subset B(a_1, \delta_1)$.

Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ de la forme $\mu = \omega_{(a, \delta)}$, sans supposer que le corps K soit algébriquement clos. Si δ n'appartient pas au groupe Γ_{ν} , le groupe des ordres Γ_{μ} est égal à $\Gamma_{\nu} \oplus \delta\mathbb{Z}$ et nous avons

$$\text{rang.}\Gamma_{\mu}/\Gamma_{\nu} = \text{rang.rat.}\Gamma_{\mu}/\Gamma_{\nu} = 1 \quad \text{et} \quad \kappa_{\mu} = \kappa_{\nu} .$$

Si δ appartient au groupe Γ_{ν} , alors le groupe des ordres Γ_{μ} est égal à Γ_{ν} et le corps résiduel κ_{μ} est une extension transcendante de κ_{ν} engendré par l'image de $b(x-a)$ où $b \in K$ avec $\nu(b) = -\delta$, d'où :

$$\Gamma_{\mu} = \Gamma_{\nu} \quad \text{et} \quad \dim.\text{alg.}\kappa_{\nu}\kappa_{\mu} = 1 .$$

Dans tous les cas l'algèbre graduée associée $\text{gr}_{\mu}K[x]$ associée à la valuation bien spécifiée $\mu = \omega_{(a, \delta)}$ est isomorphe à $G^{(0)}[S]$, où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple isomorphe à $\text{gr}_{\nu}K$, et S est l'image $H_{\mu}(x-a)$. Pour tout $a' \in K$ nous avons

$$\begin{aligned} H_{\mu}(x-a') &= S & \text{si } \mu(x-a') &= \mu(x-a) < \nu(a-a'), \\ H_{\mu}(x-a') &= S - H_{\nu}(a-a') & \text{si } \mu(x-a') &= \mu(x-a) = \nu(a-a'), \\ H_{\mu}(x-a') &= H_{\nu}(a-a') & \text{si } \mu(x-a') &= \nu(a-a') < \mu(x-a), \end{aligned}$$

d'où la remarque suivante.

Remarque 2.13. Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ de la forme $\mu = \omega_{(a, \delta)}$, alors le polynôme $(x-b)$ a son image $H_{\mu}(x-b)$ inversible dans l'algèbre graduée $\text{gr}_{\mu}K$ si et seulement si $\nu(a-b) < \delta$.

3. PASSAGE À LA CLÔTURE ALGÈBRIQUE

Dans cette partie nous nous donnons un corps valué (K, ν) , une clôture algébrique \bar{K} de K et une valuation $\bar{\nu}$ de \bar{K} qui prolonge la valuation ν , nous considérons une valuation μ de $K[x]$ qui prolonge la valuation ν et nous allons étudier les prolongements $\bar{\mu}$ à $\bar{K}[x]$ de μ qui sont aussi des prolongements de la valuation $\bar{\nu}$.

Définition. Pour tout polynôme f de $K[x]$ nous définissons l'étendue de f , que nous notons $\varepsilon_{\mu}(f)$, par

$$\varepsilon_{\mu}(f) = \text{Sup}(\bar{\mu}(x-a) ; a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}) ,$$

où $\bar{\mu}$ est un prolongement de la valuation μ .

Proposition 3.1. L'étendue du polynôme f est indépendante du prolongement $\bar{\mu}$ choisi.

Preuve. Soient $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_2$ deux prolongements de la valuation μ de $K[x]$ à $\bar{K}[x]$, alors il existe σ dans $\text{Aut}(\bar{K}(x)/K(x)) \simeq \text{Aut}(\bar{K}/K)$ tel que $\mu_1 = \mu_2 \circ \sigma$, en particulier pour tout $a \in \bar{K}$ nous avons

$$\bar{\mu}_1(x - a) = \bar{\mu}_2(x - \sigma(a)) .$$

Comme le groupe $\text{Aut}(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur les racines du polynôme f nous en déduisons que les ensembles $\{\bar{\mu}_1(x - a) ; a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}\}$ et $\{\bar{\mu}_2(x - a) ; a \text{ racine de } f \text{ dans } \bar{K}\}$ sont égaux. □

Proposition 3.2. *La valuation $\bar{\mu}$ est bien spécifiée si et seulement si la valuation μ l'est.*

Preuve. Comme la valuation $\bar{\mu}$ est une extension de la valuation μ nous avons un morphisme injectif canonique d'algèbres graduées intègres

$$\rho : \text{gr}_\mu(K[x]) \hookrightarrow \text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x]) .$$

Nous supposons d'abord que la valuation μ n'est pas bien spécifiée, alors l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu(K[x])$ est simple, et nous devons montrer que pour tout $a \in \bar{K}$, l'élément $H_{\bar{\mu}}(x - a)$ est inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$. Soit $a \in \bar{K}$, et soit ϕ le polynôme minimal de a sur K , nous écrivons $\phi(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, où les a_i sont les racines de ϕ dans \bar{K} . L'image de $H_\mu(\phi)$ par ρ est égale au produit

$$\prod_{i=1}^d H_{\bar{\mu}}(x - a_i) ,$$

et comme $H_\mu(\phi)$ est inversible dans $\text{gr}_\mu(K[x])$, chacun des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x - a_i)$ est inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$.

Réciproquement nous supposons que la valuation μ est bien spécifiée, alors l'algèbre graduée $\text{gr}_\mu(K[x])$ est isomorphe à une algèbre de polynômes $G^{(0)}[T]$, où $G^{(0)}$ est une algèbre simple et T est l'image $H_\mu(\phi)$ du polynôme-clé ϕ qui définit la valuation μ .

Si la valuation $\bar{\mu}$ n'était pas bien spécifiée, l'image de T par ρ serait inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$ et il existerait en particulier $b \in \bar{K}$ tel $\rho(T) = H_{\bar{\mu}}(b)$. Il existe un polynôme à coefficients dans K , dont b est une racine, $c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \dots + c_1 X + c_0$, avec $c_j \in K$ et $c_0 \neq 0$. En particulier, si nous nous restreignons aux termes de valuation minimale, il existe k , $k \geq 2$, et $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ tels que

$$H_{\bar{\mu}}(c_{i_k} b^{i_k}) + H_{\bar{\mu}}(c_{i_{k-1}} b^{i_{k-1}}) + \dots + H_{\bar{\mu}}(c_{i_1} b^{i_1}) = 0$$

dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$. Nous en déduirions la relation

$$H_\mu(c_{i_k}) T^{i_k} + H_\mu(c_{i_{k-1}}) T^{i_{k-1}} + \dots + H_\mu(c_{i_1}) T^{i_1} = 0$$

dans $\text{gr}_\mu(K[x]) = G^{(0)}[T]$, ce qui est impossible car les $H_\mu(c_i)$ sont dans $G^{(0)}$. □

Proposition 3.3. *Soit f un polynôme dans $K[x]$ alors son image $H_\mu(f)$ est inversible dans $\text{gr}_\mu(K[x])$ si et seulement si son image $H_{\bar{\mu}}(f) = \rho(H_\mu(f))$ est inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$.*

Preuve. L'implication $H_\mu(f)$ inversible $\Rightarrow H_{\bar{\mu}}(f)$ inversible est évidente.

Pour montrer l'implication réciproque, nous pouvons supposer que les valuations μ et $\bar{\mu}$ sont bien spécifiées, et soit $f \in K[x]$ tel que $H_{\bar{\mu}}(f)$ est inversible. Alors il existe $b \in \bar{K}$ tel que $H_{\bar{\mu}}(f) = H_{\bar{\mu}}(b)$, et comme dans la démonstration précédente nous pouvons trouver des entiers $k, k \geq 2$, et $0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, et des éléments c_{i_1}, \dots, c_{i_k} dans K non nuls tels que

$$H_{\bar{\mu}}(c_{i_k} b^{i_k}) + H_{\bar{\mu}}(c_{i_{k-1}} b^{i_{k-1}}) + \dots + H_{\bar{\mu}}(c_{i_1} b^{i_1}) = 0$$

dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$. Nous en déduisons que nous avons

$$(H_\mu(c_{i_k} f^{i_k - i_1 - 1}) + \dots + H_\mu(c_{i_2} f^{i_2 - i_1 - 1})) H_\mu(f) + H_\mu(c_{i_1}) = 0,$$

et par conséquent $H_\mu(f)$ est inversible. □

Théorème 3.4. *La valuation μ est bien spécifiée si et seulement si l'ensemble*

$$E_\mu = \{\varepsilon_\mu(f) \mid f \in K[x]\}$$

admet un plus grand élément $\bar{\varepsilon}_\mu$.

Dans ce cas un polynôme ϕ définit la valuation μ si et seulement si ϕ est un polynôme unitaire de $K[x]$ de degré minimal vérifiant $\varepsilon_\mu(\phi) = \bar{\varepsilon}_\mu$.

Preuve. D'après la proposition 3.2 la valuation μ est bien spécifiée si et seulement si la valuation $\bar{\mu}$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si l'ensemble $\Lambda_{\bar{\mu}} = \{\bar{\mu}(x - b) \mid b \in \bar{K}\}$ admet un plus grand élément $\lambda_{\bar{\mu}}$ (cf. proposition 2.10).

Supposons que la valuation μ est bien spécifiée et soit $a \in \bar{K}$ tel que $\lambda_{\bar{\mu}} = \bar{\mu}(x - a)$, alors par définition pour tout polynôme f dans $K[x]$ nous avons l'inégalité $\varepsilon_\mu(f) \leq \lambda_{\bar{\mu}}$. Si ϕ est le polynôme minimal de a dans $K[x]$, plus généralement si ϕ est un polynôme dans $K[x]$ qui admet a comme racine, nous avons par définition $\bar{\mu}(x - a) \leq \varepsilon_\mu(\phi)$. Nous en déduisons que l'ensemble E_μ admet un plus grand élément $\bar{\varepsilon}_\mu$ égal à $\lambda_{\bar{\mu}}$, et que la valeur $\bar{\varepsilon}_\mu$ est atteinte pour tout polynôme ϕ de $K[x]$ admettant a comme racine.

Réciproquement supposons que la valuation μ n'est pas bien spécifiée, l'ensemble $\Lambda_{\bar{\mu}}$ n'admet pas de plus grand élément, en particulier pour tout polynôme f de $K[x]$ nous pouvons trouver $a \in \bar{K}$ tel que $\bar{\mu}(x - a) > \bar{\mu}(x - b)$ pour toute racine b de f . Un polynôme g dans $K[x]$ admettant a comme racine vérifie alors $\varepsilon_\mu(g) > \varepsilon_\mu(f)$, par conséquent l'ensemble E_μ n'admet pas de plus grand élément.

Soit ϕ un polynôme de $K[x]$ qui définit la valuation μ alors nous avons un isomorphisme

$$\text{gr}_\mu K[x] = G^{(0)}[T],$$

où $G^{(0)}$ est une algèbre graduée simple et T est l'image $H_\mu(\phi)$ du polynôme ϕ et nous écrivons comme précédemment $\phi(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, où les racines a_i de ϕ dans \bar{K} vérifient

$$\varepsilon_\mu(\phi) = \bar{\mu}(x - a_1) = \dots = \bar{\mu}(x - a_c) > \bar{\mu}(x - a_{c+1}) \geq \dots \geq \bar{\mu}(x - a_d).$$

Nous ne supposons pas que le polynôme ϕ est séparable, par conséquent les racines a_1, \dots, a_d de ϕ ne sont pas supposées distinctes. L'image $\rho(T)$ de T dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$ est alors égale au produit

$$\prod_{i=1}^d H_{\bar{\mu}}(x - a_i) ,$$

et nous déduisons de la démonstration de la proposition 3.2 que $\rho(T)$ n'est pas inversible. En particulier un des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x - a_i)$ est non inversible, par conséquent nous avons l'égalité $\bar{\mu}(x - a_i) = \lambda_{\bar{\mu}} = \text{Sup}\{\bar{\mu}(x - b) \mid b \in \bar{K}\}$, d'où $\varepsilon_{\mu}(\phi) = \lambda_{\bar{\mu}}$.

Réciproquement supposons que l'ensemble $E_{\mu} = \{\varepsilon_{\mu}(f) \mid f \in K[x]\}$ admet un plus grand élément $\bar{\varepsilon}_{\mu}$ et soit ϕ un polynôme unitaire de $K[x]$ vérifiant $\varepsilon_{\mu}(\phi) = \bar{\varepsilon}_{\mu}$. Nous écrivons encore $\phi = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$ et si $H_{\mu}(\phi)$ était inversible dans $\text{gr}_{\mu}(K[x])$ nous déduirions comme précédemment que chacun des facteurs $H_{\bar{\mu}}(x - a_i)$ serait inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}}(\bar{K}[x])$, en particulier il existerait $a \in \bar{K}$ tel que $\bar{\mu}(x - a_i) < \bar{\mu}(x - a)$, ce qui contredit l'hypothèse $\varepsilon_{\mu}(\phi) = \bar{\varepsilon}_{\mu}$. □

Corollaire 3.5. *Le polynôme irréductible ϕ de $K[x]$ définit la valuation μ si et seulement si une racine a de ϕ dans \bar{K} définit une valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ qui prolonge μ .*

Plus précisément si nous écrivons $\phi(x) = \prod_{i=1}^d (x - a_i)$, avec $a = a_1$ et où les racines a_i de ϕ dans \bar{K} vérifient

$$\varepsilon_{\mu}(\phi) = \bar{\mu}(x - a_1) = \dots = \bar{\mu}(x - a_c) > \bar{\mu}(x - a_{c+1}) \geq \dots \geq \bar{\mu}(x - a_d) .$$

la valuation $\bar{\mu}$ est la valuation associée à la paire (a_i, δ) pour $1 \leq i \leq c$ et $\delta = \varepsilon_{\mu}(\phi)$. □

Dans la suite nous appelons p l'exposant caractéristique du corps K , i.e. $p = 1$ si K est de caractéristique nulle et p est égal à la caractéristique de K sinon.

Soit a un élément de \bar{K} et soit ϕ son polynôme irréductible sur K alors il existe un polynôme irréductible séparable sur K , ϕ_{sep} , et un entier $n \geq 0$ tel que nous avons l'égalité $\phi(x) = \phi_{\text{sep}}(x^{p^n})$. Le degré d_s du polynôme ϕ_{sep} est par définition le degré de séparabilité de l'extension (L/K) , où L est la sous-extension de \bar{K} engendrée par a , $L = K(a) \simeq K[x]/(\phi)$, et nous avons $d = [L : K] = p^n d_s$ et $d_s = [L : K]_{\text{sep}} = [G : H]$, où nous appelons respectivement G et H les groupes de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ et $\text{Gal}(\bar{K}/L)$. En particulier nous pouvons identifier H au sous-groupe $\{\sigma \in G \mid \sigma(a) = a\}$. Si nous posons $\text{Rac}(\phi) = \{a_1, \dots, a_{d_s}\}$ alors nous avons :

$$\phi(x) = \phi_{\text{sep}}(x^{p^n}) = \prod_{i=1}^{d_s} (x - a_i)^{p^n} ,$$

Comme précédemment nous considérons une valuation μ de l'anneau des polynômes $K[x]$ bien spécifiée, c'est à dire de la forme

$$\mu = [\mu_{\#} ; \mu(\phi) = \gamma] ,$$

telle que le polynôme-clé ou le polynôme-clé limite ϕ est de degré d , $d \geq 2$, et nous posons $\phi(x) = \phi_{\text{sep}}(x^{p^n})$ avec ϕ_{sep} séparable de degré d_s .

Il existe une racine a_1 du polynôme ϕ dans \bar{K} et une valuation $\bar{\mu}$ de l'anneau $\bar{K}[x]$ qui prolonge la valuation μ qui est de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a_1, \delta)}$ pour une certaine valeur δ , et nous notons a_j , $1 \leq j \leq d_s$, les racines de ϕ de telle façon que nous ayons

$$\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \bar{\nu}(a_1 - a_{j+1}) \quad \text{pour } 2 \leq j \leq d_s - 1 .$$

Pour toute valeur δ dans $\tilde{\Gamma}$ nous notons $c(\delta)$ le plus petit entier j , $1 \leq j \leq d_s$, tel que nous ayons $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \delta$, en particulier si $c(\delta) < n$ nous avons

$$\bar{\nu}(a_1 - a_{c(\delta)}) \geq \delta > \bar{\nu}(a_1 - a_{c(\delta)+1}) .$$

La valuation $\omega_{(a_1, \delta)}$ vérifie alors $\omega_{(a_1, \delta)} = \omega_{(a_j, \delta)}$ pour $1 \leq j \leq c(\delta)$ et nous avons les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \omega_{(a_1, \delta)}(x - a_j) &= \delta \quad \text{pour } 1 \leq j \leq c(\delta) \\ \omega_{(a_1, \delta)}(x - a_j) &= \bar{\nu}(a_1 - a_j) < \delta \quad \text{pour } c(\delta) + 1 \leq j \leq d_s . \end{aligned}$$

Lemme 3.6. *Avec les notations précédentes supposons que la valuation $\omega_{(a_1, \delta)}$ soit un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$, alors nous avons :*

$$\mu(\phi) = \gamma = p^n \left(c(\delta)\delta + \sum_{j=c(\delta)+1}^{d_s} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right) \leq p^n d_s \delta = \deg \phi \delta ,$$

avec l'inégalité stricte $\mu(\phi) < \deg \phi \delta$ seulement dans le cas où $c(\delta) < d_s$, c'est-à-dire dans le cas où la valuation μ admet plusieurs prolongements distincts à $\bar{K}[x]$.

Proposition 3.7. *Pour toute racine a du polynôme-clé ϕ il existe au plus une valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ qui prolonge les valuations $\bar{\nu}$ et μ qui soit de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$.*

Preuve. Soit $a = a_1$ une racine de ϕ , nous choisissons les autres racines a_i de façon à avoir les inégalités $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \bar{\nu}(a_1 - a_{j+1})$. Supposons que nous ayons deux valeurs δ et δ' dans $\tilde{\Gamma}$ telles que les valuations $\omega_{(a_1, \delta)}$ et $\omega_{(a_1, \delta')}$ soient des prolongements de la valuation μ , et notons respectivement c et c' les plus petits entiers tels que nous ayons $\bar{\nu}(a_1 - a_c) \geq \delta$ et $\bar{\nu}(a_1 - a_{c'}) \geq \delta'$.

D'après le lemme 3.6 nous avons l'égalité :

$$p^n \left(c\delta + \sum_{j=c+1}^{d_s} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right) = p^n \left(c'\delta' + \sum_{j=c'+1}^{d_s} \bar{\nu}(a_1 - a_j) \right) .$$

Si $c = c'$ nous en déduisons l'égalité $\delta = \delta'$.

Si $c' > c$ alors nous avons $\delta > \bar{\nu}(a_1 - a_{c'}) \geq \delta'$, et nous déduisons de l'égalité précédente que nous avons

$$c\delta + \sum_{j=c+1}^{c'} \bar{\nu}(a_1 - a_j) = c'\delta' ,$$

avec $\delta > \delta'$ et $\bar{\nu}(a_1 - a_j) \geq \delta'$ pour tout $j \leq c'$, ce qui est impossible. □

Nous déduisons de ce qui précède que si les racines du polynôme ϕ sont très proches pour la distance définies par $\bar{\nu}$ sur \bar{K} la valuation μ , définie par le polynôme ϕ admet un seul prolongement.

Proposition 3.8. *La valuation μ admet un unique prolongement $\bar{\mu}$ à $\bar{K}[x]$ si et seulement si nous avons pour tout couple de racines (a, b) de ϕ :*

$$\bar{\nu}(a - b) \geq \mu(\phi)/\deg\phi .$$

Preuve. Supposons que la valuation μ admette un seul prolongement $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$, alors nous avons pour toute racine b l'inégalité $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$ avec $\delta = \mu(\phi)/\deg\phi$.

Supposons maintenant que nous avons l'inégalité $\bar{\nu}(a - b) \geq \mu(\phi)/\deg\phi$ pour tout couple (a, b) de racines, et soit $\bar{\mu}$ un prolongement de μ de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$. Nous notons c le nombre de racines b vérifiant $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$ et $d = p^n d_s = \deg\phi$, et nous déduisons alors du lemme 3.6 la relation

$$\mu(\phi) = p^n \left(c\delta + \sum_{\{b/\bar{\nu}(a-b) < \delta\}} \bar{\nu}(a - b) \right) \geq p^n c\delta + p^n (d_s - c)\mu(\phi)/d ,$$

d'où le résultat. □

Dans la suite de ce paragraphe nous supposerons que le corps valué (K, ν) est hensélien, la valuation ν admet donc un seul prolongement noté $\bar{\nu}$ au corps \bar{K} , en particulier pour tout automorphisme σ dans le groupe de Galois $G = Gal(\bar{K}/K)$ la valuation $\bar{\nu} \circ \sigma$ est égale à la valuation $\bar{\nu}$.

Théorème 3.9. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ définie par un polynôme ϕ de degré d , et soit a une racine de ϕ dans \bar{K} . Alors il existe une valeur δ dans $\bar{\Gamma}$ et des automorphismes $\sigma_1 = id, \sigma_2, \dots, \sigma_k$, avec $1 \leq k \leq d$, dans le groupe de Galois $G = Gal(\bar{K}/K)$ tels que les prolongements $\bar{\mu}^{(l)}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ sont les valuations $\omega_{(\sigma_l(a), \delta)}$, pour $1 \leq l \leq k$.*

Preuve. Si $\bar{\mu}$ est un prolongement de la valuation μ , alors tous les prolongements de μ sont de la forme $\bar{\mu} \circ \sigma$ pour σ appartenant au groupe de Galois $Gal(\bar{K}/K)$. Supposons que $\bar{\mu}$ soit la valuation $\omega_{(a, \delta)}$ pour une racine a de ϕ , alors la valuation $\bar{\mu} \circ \sigma$ est la valuation $\omega_{(\sigma^{-1}(a), \delta)}$. En effet la valuation $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$ est déterminée par l'égalité

$$\bar{\mu}(x - b) = \text{Inf}(\delta, \bar{\nu}(a - b)) ,$$

où b parcourt \bar{K} .

Comme (K, ν) est hensélien nous en déduisons que pour tout b nous avons

$$\bar{\mu} \circ \sigma(x - b) = \text{Inf}(\delta, \bar{\nu}(a - \sigma(b))) = \text{Inf}(\delta, \bar{\nu}(\sigma^{-1}(a) - b)) .$$

Comme le groupe de Galois agit transitivement sur les racines du polynôme ϕ nous en déduisons que pour toute racine a de ϕ il existe un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ de la forme $\omega_{(a, \delta)}$, et nous déduisons de la proposition 3.7 que la valeur δ est déterminée uniquement par la valuation μ . □

Les différents prolongements de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ correspondent aux différentes boules fermées $B(a, \delta)$ de \bar{K} où a parcourt l'ensemble $Rac(\phi)$ des racines distinctes de ϕ , et deux boules $B(a, \delta)$ et $B(a', \delta)$ sont disjointes si $\bar{\nu}(a - a') < \delta$ ou égales sinon.

Soit B une boule fermée de \bar{K} , alors pour tout σ dans le groupe de Galois G la boule $\sigma.B$ est égale à B si pour tout a dans B l'image $\sigma(a)$ appartient à B et est disjointe de B sinon, en fait il suffit qu'il existe un élément a de B tel que son image appartienne à B pour que $\sigma.B$ soit égale à B . Nous pouvons définir H_B par

$$H_B := \{ \sigma \in G / \sigma.B = B \} .$$

Il est facile de vérifier que les H_B sont des sous-groupes du groupe de Galois G qui vérifient

- (1) $H_B \subset H_{B'}$ pour $B \subset B'$;
- (2) $H_{\tau.B} = \tau.H_B.\tau^{-1}$.

Il y a une bijection naturelle entre l'ensemble quotient G/H_B et l'ensemble $\{B^{(l)}\}$ des boules fermées disjointes conjuguées à B par l'action du groupe de Galois G .

Si un élément b de \bar{K} appartient à B , la boule B est la boule fermée $B(b, \delta)$ et le sous-groupe H_B s'identifie au sous-groupe $H_{(b, \delta)}$ défini par

$$H_{(b, \delta)} := \{ \sigma \in G / \bar{\nu}(b - \sigma(b)) \geq \delta \} ,$$

et comme précédemment nous avons $H_{(b, \delta)} \subset H_{(b, \delta')}$ pour $\delta \geq \delta'$, et $H_{(\tau(b), \delta)} = \tau.H_{(b, \delta)}.\tau^{-1}$. Rappelons que pour tout élément b de \bar{K} nous définissons la *constante de Krasner* $\Delta_K(b)$ par

$$\Delta_K(b) = \text{Sup}(\bar{\nu}(b - b') ; b' \text{ conjugué de } b, b' \neq b) .$$

Alors, pour $\delta > \Delta_K(b)$ le sous-groupe $H_{(b, \delta)}$ est égal au groupe de Galois $H = \text{Gal}(\bar{K}/K(b))$.

La bijection naturelle entre l'ensemble quotient G/H et l'ensemble $\text{Rac}(\psi)$ des racines du polynôme irréductible $\psi = \text{Irr}_K(b)$ de b sur K induit une bijection entre H_B/H et l'ensemble $\text{Rac}_B(\psi)$ des racines de ψ appartenant à la boule fermée $B = B(b, \delta)$. En particulier l'ensemble G/H_B est fini et il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ dans G tels que l'ensemble $\{B^{(l)}\}$ des boules fermées conjuguées à B soit égal à $\{\sigma_l.B\}$, avec $\sigma_1 = \text{id}$ et $B_{(1)} = B$. En particulier les prolongements $\bar{\mu}^{(l)}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ définis au théorème 3.9 sont les valuations associées aux boules $B^{(l)}$.

Nous définissons la *distance* $\eta_{l, l'}$ entre deux boules distinctes $B_{(l)}$ et $B_{(l')}$ par

$$\eta_{l, l'} = \bar{\nu}(b - b') \text{ pour } b \in B_{(l)} \text{ et } b' \in B_{(l')} ,$$

et ceci est indépendant des éléments b et b' choisis car la distance associée à $\bar{\nu}$ est ultra-métrique, et vérifie $\eta_{l, l'} < \delta$.

Soit b appartenant à \bar{K} , nous notons L l'extension $K(b)$, ψ son polynôme irréductible sur K , ψ_{sep} le polynôme irréductible séparable associé, et nous posons $d = p^n d_s$ où $d = \deg \psi = [L : K]$ et $d_s = \deg \psi_{\text{sep}} = [L : K]_{\text{sep}} = [G : H]$, avec $H = \text{Gal}(\bar{K}/L)$.

Proposition 3.10. *Si b appartient à la boule B nous avons l'inclusion $H \subset H_B$ et si nous posons $c = [H_B : H]$ et $k = [G : H_B]$, nous avons l'égalité*

$$d_s = kc .$$

De plus nous pouvons trouver $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_c$ dans G avec $\delta_1 = \text{id}$, tels que pour tout l , $1 \leq l \leq k$, l'ensemble $\text{Rac}_{B^{(l)}}(\phi)$ des racines de ϕ appartenant à la boule $B^{(l)}$ est égal à l'ensemble $\{\sigma_l \delta_i(b), 1 \leq i \leq c\}$.

Preuve. C'est une conséquence de l'égalité $H_B = H_{(b,\delta)}$ et du fait que la valuation $\bar{\nu} \circ \sigma$ est égale à la valuation $\bar{\nu}$ pour tout σ dans G .

□

Corollaire 3.11. *Soient μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$, $\bar{\mu}$ un prolongement de μ à $\bar{K}[x]$ associé à la boule fermée B de diamètre δ et b un élément de \bar{K} appartenant à B de polynôme irréductible sur K $\text{Irr}_K(b) = \psi$. Alors avec les notations précédentes nous avons*

$$\mu(\psi) = p^n c \left(\delta + \sum_{l=2}^k \eta_{1,l} \right) \leq \deg \psi \cdot \delta .$$

□

En particulier nous retrouvons que si la valuation μ est définie par le polynôme ϕ nous avons l'inégalité $\gamma = \mu(\phi) \leq \deg \phi \cdot \delta$, avec égalité si et seulement si la valuation μ admet un seul prolongement à $\bar{K}[x]$.

D'après la proposition 2.11 nous pouvons associer à une valuation de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$ la boule fermée $B = B(a,\delta)$ de \bar{K} , et la valuation est entièrement déterminée par B , et nous déduisons du théorème 3.9 nous pouvons associer à la valuation μ de $K[x]$ une famille $\mathcal{B}(\mu) = (B^{(l)})_{1 \leq l \leq k}$ de boules fermées disjointes, de même diamètre δ , chacune des boules $B^{(l)}$ correspondant à la valuation $\bar{\mu}^{(l)}$.

Proposition 3.12. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ et soit $\mathcal{B}(\mu) = (B^{(l)})_{1 \leq l \leq k}$ la famille de boules fermées de \bar{K} associée. Alors un polynôme f de $K[x]$ a son image $H_\mu(f)$ non inversible dans $\text{gr}_\mu(K[x])$ si et seulement si l'ensemble $\text{Rac}(f)$ des racines de f est inclus dans la réunion des boules fermées $\bigcup_{1 \leq l \leq k} B^{(l)}$.*

Preuve. Soit $\bar{\mu}$ un prolongement de μ à $\bar{K}[x]$ de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a,\delta)}$, d'après la proposition 3.3 le polynôme f a son image $H_\mu(f)$ non inversible dans $\text{gr}_\mu(K[x])$ si et seulement si f a une racine b tel que $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$. Comme le groupe de Galois agit transitivement sur l'ensemble des racines $\text{Rac}(f)$ et sur l'ensemble des boules $\mathcal{B}(\mu)$, nous en déduisons le résultat.

□

Remarque 3.13. *A toute valuation bien spécifiée μ de $K[x]$, nous pouvons associer l'entier k défini comme le nombre de boules fermées distinctes $B^{(l)}$ conjuguées à la boule fermée B associée à un prolongement $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$.*

Nous déduisons de ce qui précède que tout polynôme irréductible ψ de $K[x]$ ayant une racine dans B est de degré divisible par k . En particulier si k ne divise pas le degré d'un polynôme f son image $H_\mu(f)$ est inversible dans $\text{gr}_\mu(K[x])$.

Nous voulons étudier les prolongements $\bar{\mu}_i$ des valuations μ_i appartenant à une famille admise $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ de valuations de $K[x]$. Pour cela il nous faut d'abord étudier les prolongements à $\bar{K}[x]$ de deux valuations dont l'une est valuation augmentée de l'autre.

Théorème 3.14. *Soit μ une valuation bien spécifiée de $K[x]$ obtenue comme valuation augmentée $\mu = [\mu_{\sharp} ; \mu(\phi) = \gamma]$ et soit $\bar{\mu}_{\sharp}$ un prolongement de la valuation μ_{\sharp} à $\bar{K}[x]$. Alors il existe un prolongement $\bar{\mu}$ de la valuation μ à $\bar{K}[x]$ qui est obtenu comme valuation augmentée $\bar{\mu} = [\bar{\mu}_{\sharp} ; \bar{\mu}(\bar{\phi}) = \bar{\gamma}]$.*

Preuve. Comme la valuation μ_{\sharp} admet une valuation augmentée elle est bien spécifiée, alors pour tout prolongement $\bar{\mu}_{\sharp}$ il existe une racine a_{\sharp} du polynôme-clé ϕ_{\sharp} définissant la valuation μ_{\sharp} et une valeur δ_{\sharp} dans $\tilde{\Gamma}$ telles que le prolongement $\bar{\mu}_{\sharp}$ soit la valuation $\omega_{(a_{\sharp}, \delta_{\sharp})}$.

Comme le polynôme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ_{\sharp} son image $H_{\mu_{\sharp}}(\phi)$ dans l'anneau gradué $\text{gr}_{\mu_{\sharp}} K[x]$ n'est pas inversible. Par conséquent il existe au moins une racine a de ϕ dans \bar{K} telle que $H_{\bar{\mu}_{\sharp}}(x - a)$ ne soit pas inversible dans l'anneau gradué $\text{gr}_{\bar{\mu}_{\sharp}} \bar{K}[x]$, d'où d'après la remarque 2.13 l'inégalité $\bar{\nu}(a - a_{\sharp}) \geq \delta_{\sharp}$. Nous en déduisons que la valuation $\bar{\mu}_{\sharp}$ peut s'écrire $\bar{\mu}_{\sharp} = \omega_{(a, \delta_{\sharp})}$

Soit $\bar{\mu}$ le prolongement de la valuation μ associé à la racine a du polynôme ϕ , c'est-à-dire qui est de la forme $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$. Deux valuations de la forme $\rho_1 = \omega_{(a, \delta_1)}$ et $\rho_2 = \omega_{(a, \delta_2)}$ sont comparables et vérifient $\rho_1 \leq \rho_2$ si et seulement si $\delta_1 \leq \delta_2$. Par conséquent comme nous avons l'inégalité $\mu_{\sharp} \leq \mu$ nous avons les inégalités $\delta_{\sharp} \leq \delta$ et $\bar{\mu}_{\sharp} \leq \bar{\mu}$. Nous en déduisons le résultat car les seuls polynômes-clés sur $\bar{K}[x]$ sont des polynômes de degré 1, et nous pouvons prendre $\bar{\phi} = x - a$. □

Proposition 3.15. *Soient $\bar{\mu}_{\sharp} = \omega_{(a_{\sharp}, \delta_{\sharp})}$ et $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$ les deux valuations définies dans le théorème précédent, et supposons que les polynômes ϕ_{\sharp} et ϕ ne sont pas μ_{\sharp} -équivalents, alors nous avons l'égalité :*

$$\bar{\nu}(a - a_{\sharp}) = \delta_{\sharp}$$

Preuve. Nous déduisons de la proposition 3.3 que pour toute valuation μ de $K[x]$ et tout prolongement $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$ de μ à $\bar{K}[x]$, si un polynôme f de $K[x]$ n'est pas μ -inversible alors il existe une racine b de f telle que $\bar{\nu}(a - b) \geq \delta$.

Comme les polynômes ϕ_{\sharp} et ϕ ne sont pas μ_{\sharp} -équivalents, le polynôme ϕ_{\sharp} est μ -inversible, nous en déduisons l'inégalité $\bar{\nu}(a - a_{\sharp}) < \delta$, par conséquent nous avons $\bar{\mu}(x - a_{\sharp}) = \bar{\nu}(a - a_{\sharp}) < \delta = \bar{\mu}(x - a)$. Nous déduisons aussi du fait que ϕ_{\sharp} est μ -inversible, l'égalité $\delta_{\sharp} = \bar{\mu}_{\sharp}(x - a_{\sharp}) = \bar{\mu}(x - a_{\sharp})$, d'où le résultat. □

Soit μ une valuation bien spécifiée obtenue comme valuation augmentée de la valuation μ_{\sharp} telle que les polynômes ϕ_{\sharp} et ϕ ne sont pas μ_{\sharp} -équivalents, nous appelons $\mathcal{B}(\mu_{\sharp}) = (B_{\sharp}^{(l)})_{1 \leq l \leq k_{\sharp}}$ et $\mathcal{B}(\mu) = (B^{(l)})_{1 \leq l \leq k}$ les familles de boules fermées de \bar{K} associées respectivement aux valuations μ_{\sharp} et μ .

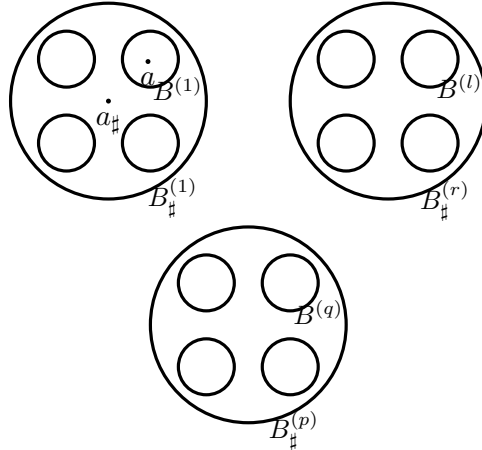
Soit $\bar{\mu}_{\sharp}^{(r)}$ le prolongement de la valuation μ_{\sharp} associé à la boule $B_{\sharp}^{(r)} = B(a_{\sharp}^{(r)}, \delta_{\sharp})$, alors pour toute racine $a^{(l)}$ du polynôme ϕ vérifiant $\bar{\nu}(a^{(l)} - a_{\sharp}^{(r)}) \geq \delta_{\sharp}$ la boule fermée associée $B^{(l)} = B(a^{(l)}, \delta)$ est incluse dans $B_{\sharp}^{(r)}$. Comme le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ agit transitivement

sur les ensembles des racines $\{a_{\sharp}^{(r)}\}$ et $\{a^{(l)}\}$ respectivement des polynômes ϕ_{\sharp} et ϕ nous en déduisons le résultat suivant.

Proposition 3.16. *Chaque boule $B_{\sharp}^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_{\sharp})$ contient s boules $B^{(l)}$ appartenant à $\mathcal{B}(\mu)$, où s est un entier strictement positif indépendant de la boule $B_{\sharp}^{(r)}$ choisie, et toute boule $B^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu)$ est contenue dans une boule $B_{\sharp}^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_{\sharp})$.*

□

Nous pouvons représenter les boules dans \bar{K} associées aux prolongements des valuations μ_{\sharp} et μ par le diagramme suivant :



Disposition des boules fermées des familles $\mathcal{B}(\mu_{\sharp})$ et $\mathcal{B}(\mu)$ dans \bar{K}

Dans le cas où les polynômes ϕ_{\sharp} et ϕ sont μ_{\sharp} -équivalents nous obtenons un résultat identique. En effet considérons deux valuations bien spécifiées μ_{\sharp} et μ de $K[x]$ définies par le même polynôme ϕ et par des valeurs γ_{\sharp} et γ différentes avec $\gamma_{\sharp} < \gamma$. Soit a une racine de ϕ dans \bar{K} et choisissons deux prolongements $\bar{\mu}_{\sharp}$ et $\bar{\mu}$ respectivement de μ_{\sharp} et μ à $\bar{K}[x]$, de la forme $\bar{\mu}_{\sharp} = \omega_{(a, \delta_{\sharp})}$ et $\bar{\mu} = \omega_{(a, \delta)}$. Comme les valuations $\omega_{(a, \delta_{\sharp})}$ et $\omega_{(a, \delta)}$ sont comparables et comme nous avons $\mu_{\sharp} \leq \mu$ nous en déduisons l'inégalité $\delta_{\sharp} < \delta$. Si nous appelons $\mathcal{I}(\mu_{\sharp}) = (I_{\sharp}^{(l)} ; 1 \leq l \leq k_{\sharp})$ et $\mathcal{I}(\mu) = (I^{(l)} ; 1 \leq l \leq k)$ les partitions de l'ensemble des racines de ϕ associées respectivement aux valuations μ_{\sharp} et μ , alors $\mathcal{I}(\mu)$ est plus fine que $\mathcal{I}(\mu_{\sharp})$, et nous trouvons la même disposition des boules fermées associées aux valuations que précédemment.

Nous voulons étudier maintenant le cas d'une famille continue $\mathcal{C} = (\mu_{\alpha})_{\alpha \in A}$ de valuations de $K[x]$, pour tout α dans A nous notons $\mathcal{B}(\mu_{\alpha}) = (B_{\alpha}^{(l)})_{1 \leq l \leq k_{\alpha}}$ la famille de boules fermées de \bar{K} associée à la valuation μ_{α} et B_{α} la réunion $B_{\alpha} = \bigcup_{1 \leq l \leq k_{\alpha}} B_{\alpha}^{(l)}$. Nous déduisons de la proposition 3.16 qu'il existe α_0 tel que pour tout $\beta \geq \alpha \geq \alpha_0$ dans A nous avons $k_{\beta} = k_{\alpha}$ et chaque boule $B_{\alpha}^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu_{\alpha})$ contient une unique boule $B_{\beta}^{(l)}$ de $\mathcal{B}(\mu_{\beta})$, et notons $k_{\mathcal{C}} = k_{\alpha}$ pour $\alpha \geq \alpha_0$. Nous

posons alors

$$B_{\mathcal{C}}^{(l)} = \bigcap_{\alpha \in A, \alpha \geq \alpha_0} B_{\alpha}^{(l)} \quad \text{et} \quad B_{\mathcal{C}} = \bigcap_{\alpha \in A} B_{\alpha} = \bigcup_{1 \leq l \leq k_{\mathcal{C}}} B_{\mathcal{C}}^{(l)}.$$

L'ensemble $B_{\mathcal{C}}^{(l)}$ obtenu comme intersection d'une famille décroissante de boules fermées est une boule fermée, éventuellement vide. Le groupe de Galois $G = \text{Gal}(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur les racines des polynômes ϕ_{α} définissant les valuations μ_{α} , par conséquent toutes les boules $B_{\alpha}^{(l)}$ sont isomorphes.

Proposition 3.17. *Le polynôme ϕ appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \{f \in K[x] \mid \mu_{\alpha}(f) < \mu_{\beta}(f), \forall \alpha < \beta \in A\}$ si et seulement si l'ensemble des racines $\text{Rac}(\phi)$ de ϕ est inclus dans $B_{\mathcal{C}}$.*

Preuve. Si ϕ appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, pour tout α dans A l'image de ϕ dans $\text{gr}_{\mu_{\alpha}} K[x]$ est non inversible et nous déduisons le résultat de la proposition 3.12. □

Soient μ une valuation de $K[x]$ et $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ la famille admise de valuations associée, chaque valuation μ_i de la famille \mathcal{A} est bien spécifiée, définie par le polynôme-clé ϕ_i , et soit $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}(\mu_i)$ la famille de boules fermées de \bar{K} associée à μ_i par le théorème 3.9.

Proposition 3.18. *La famille $(\mathcal{B}_i)_{i \in I}$ est décroissante, c'est-à-dire pour tout $i < j$ dans I chaque boule $B_i^{(r)}$ de \mathcal{B}_i contient s boules $B_j^{(l)}$ appartenant à \mathcal{B}_j , où s est un entier strictement positif indépendant de la boule $B_i^{(r)}$ choisie, et toute boule $B_j^{(l)}$ de \mathcal{B}_j est contenue dans une boule $B_i^{(r)}$ de \mathcal{B}_i .*

Preuve. C'est une conséquence des propositions 3.16 et 3.17. □

Soit μ une valuation de $K[x]$ et soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ la famille admise associée.

Définition. *Nous appelons ensemble caractéristique de la valuation μ le sous-ensemble $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mu)$ de \bar{K} obtenu comme l'intersection des ensembles B_i pour i dans I , où chaque B_i est la réunion des boules fermées $B_i^{(r)}$ appartenant à $\mathcal{B}(\mu_i)$.*

Il existe $i_0 \in I$ tel que les ensembles $\mathcal{B}(\mu_i)$ pour $i \geq i_0$ ont tous le même nombre s d'éléments, c'est-à-dire que pour tout $j \geq i \geq i_0$ chaque boule fermée $B_i^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_i)$ contient une unique boule fermée $B_j^{(r)}$ de $\mathcal{B}(\mu_j)$. Pour tout r , nous appelons $\mathcal{B}^{(r)}$ la famille décroissante de boules fermées $(B_i^{(r)})_{i \geq i_0}$, et nous notons $\mathbf{B}^{(r)}$ l'intersection

$$\mathbf{B}^{(r)} = \bigcap_{i \geq i_0} B_i^{(r)}.$$

Le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{K}/K)$ agit transitivement sur l'ensemble des familles $\mathcal{B}^{(r)}$, donc ces familles sont isomorphes et nous avons l'égalité :

$$\mathbf{B} = \bigcup_{1 \leq r \leq s} \mathbf{B}^{(r)}.$$

D'après la proposition 2.11 chaque famille de boules fermées $\mathcal{B}^{(r)}$ définit une valuation $\bar{\mu}^{(r)}$ de $\bar{K}[x]$, et nous déduisons de ce qui précède le résultat suivant.

Théorème 3.19. *Les valuations $\bar{\mu}^{(r)}$ associées aux familles $\mathcal{B}^{(r)}$ sont les extensions à $\bar{K}[x]$ de la valuation μ .*

Si l'ensemble caractéristique $\mathbf{B}(\mu)$ de μ est vide la valuation μ n'est pas bien spécifiée, et chaque valuation $\bar{\mu}^{(r)}$ est définie par la suite pseudo-convergente associée à la famille $\mathcal{B}^{(r)}$.

Si l'ensemble caractéristique $\mathbf{B}(\mu)$ de μ est non vide la valuation μ est bien spécifiée, et chaque valuation $\bar{\mu}^{(r)}$ est définie par la boule fermée non vide $\mathbf{B}^{(r)}$.

Corollaire 3.20. *Soit μ une valuation de $K[x]$ et soit $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ une famille admise associée, alors pour toute extension $\bar{\mu}$ de μ à $\bar{K}[x]$, il existe une famille $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = (\bar{\mu}_i)_{i \in I}$ de valuations de $\bar{K}[x]$ correspondant à une suite décroissante $(B_i)_{i \in I}$ de boules fermées de \bar{K} telle que pour tout $i \in I$ la valuation $\bar{\mu}_i$ est une extension de la valuation μ_i .*

Remarque 3.21. *Soit $(C, 0)$ une singularité de courbe plane dans \mathbb{A}_k^2 définie par un polynôme $f \in k[x, y]$ pour un choix judicieux des coordonnées x et y , nous considérons alors f comme un élément P de $K[x]$ où K est le corps $k(y)$ que nous munissons de la valuation y -adique ν . Alors l'étude de la singularité $(C, 0)$ est liée à l'étude des prolongements μ de la valuation ν au corps $L = K[x]/(P)$ et les valuations μ_i apparaissant dans la famille admise \mathcal{A} associée à la pseudo-valuation $\bar{\mu}$ de $K[x]$ de noyau (P) définie par μ sont en reliées aux paires de Puiseux de la singularité $(C, 0)$ (cf. Exemple 3.2 de [Va 4]).*

Il est alors possible de voir une analogie entre la famille des boules $(B_i)_{i \in I}$ définie à la proposition 3.18 et l'action du groupe de Galois sur celle-ci, et la construction du carrousel donnée par Lê D.T. (voir par exemple [Le 1] ou [Le 2]).

Remarque 3.22. *Soient ν une valuation de K , μ un prolongement de ν à l'extension $K(x)$ de K et $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ la famille de valuations de $K(x)$ associée à μ considérée comme valuation de l'anneau des polynômes $K[x]$. D'après ce qui précède la famille \mathcal{A} peut être définie en considérant la famille des boules $(B_i)_{i \in I}$ de \bar{K} , en particulier on peut en déduire que cette famille ne dépend pas du générateur x de l'extension $K(x)$ de K .*

Nous retrouvons ainsi le résultat principal de [Va 6].

4. RESTRICTION D'UNE VALUATION DÉFINIE SUR $\bar{K}[x]$

Dans cette partie nous nous donnons une valuation $\bar{\mu}$ définie sur $\bar{K}[x]$ et nous voulons étudier sa restriction μ à l'anneau $K[x]$. Comme précédemment nous supposons que (K, ν) est un corps valué hensélien et la valuation $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ est un prolongement de l'unique extension $\bar{\nu}$ de ν à la clôture algébrique \bar{K} de K .

Pour tout b appartenant à \bar{K} nous définissons le degré de b sur K comme le degré de l'extension algébrique qu'il engendre, c'est aussi le degré du polynôme irréductible $\text{Irr}_K(b)$ de b sur K :

$$\deg_K(b) = \deg \text{Irr}_K(b) = [K(b) : K] .$$

Proposition 4.1. *Soient $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\bar{K}[x]$ associée à une boule fermée B , μ la restriction de $\bar{\mu}$ à $K[x]$ et ϕ un polynôme de $K[x]$ définissant la valuation μ . Alors pour tout $b \in B$ nous avons l'inégalité :*

$$\deg_K(b) \geq \deg \phi .$$

Preuve. Nous déduisons de la remarque 2.13 que si b appartient à B l'image de $(x - b)$ est non-inversible dans $\text{gr}_{\bar{\mu}} \bar{K}[x]$, alors l'image du polynôme $\text{Irr}_K(b)$ est non inversible dans $\text{gr}_{\mu} K[x]$, et par conséquent il vérifie l'inégalité $\deg \text{Irr}_K(b) \geq \deg \phi$. □

Pour tout sous-ensemble E de \bar{K} nous définissons le *degré de E sur k* par

$$\deg_K(E) := \text{Inf}(\deg_K(b) / b \in E) .$$

Théorème 4.2. *Soient $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\bar{K}[x]$ et B la boule fermée de \bar{K} associée. Alors un polynôme irréductible ϕ de $K[x]$ définit la valuation μ restriction de $\bar{\mu}$ à $K[x]$ si et seulement si ϕ a une racine a appartenant à B avec*

$$\deg_K(a) = \deg_K(B) .$$

Preuve. Soit ϕ un polynôme qui définit la valuation μ , alors nous déduisons de la proposition 4.1 que tout b appartenant à B vérifie $\deg_K(b) \geq \deg \phi$ et comme ϕ a une racine appartenant à B nous trouvons $\deg \phi = \deg_K(B)$.

Réciproquement soit b appartenant à B avec $\deg_K(b) = \deg_K(B)$, et soit ψ son polynôme irréductible sur K . Les polynômes ϕ et ψ ont même degré d et si nous appelons respectivement d_s et d'_s le nombre de racines distinctes de ϕ et ψ nous pouvons écrire $d = p^n d_s$ et $d = p^{n'} d'_s$.

Soit k le nombre de boules fermées $B^{(l)}$ conjuguées à B , alors d'après la proposition 3.10 nous avons les égalités $d_s = kc$ et $d'_s = kc'$ où c et c' sont respectivement le nombre de racines de ϕ et de ψ appartenant à une boule $B^{(l)}$. Nous en déduisons l'égalité

$$p^n c = p^{n'} c' = d/k ,$$

et d'après le corollaire 3.11 nous trouvons $\mu(\phi) = \mu(\psi)$. Le théorème est alors une conséquence de la proposition 2.9. □

Soit a appartenant à \bar{K} , alors pour tout δ dans $\Gamma_{\bar{\nu}}$ nous pouvons définir l'entier $\rho_a(\delta)$ par

$$\rho_a(\delta) = \deg_K(B(a, \delta)) .$$

Nous avons ainsi une application croissante ρ_a de $\Gamma_{\bar{\nu}}$ dans \mathbb{N} majorée par $d = \deg_K(a)$. De plus la valeur de ρ_a sur $\{\delta' \in \Gamma_{\bar{\nu}} / \delta' \leq \delta\}$ ne dépend pas de a mais uniquement de la boule $B = B(a, \delta)$, en effet si b appartient à B alors pour tout $\delta' \leq \delta$ nous avons encore $B(a, \delta') = B(b, \delta')$.

Pour tout $e \in \mathbb{N}$, avec $e \leq d$ nous définissons l'ensemble

$$R_a(e) = \{\delta' \in \Gamma_{\bar{\nu}} / \rho_a(\delta') \leq e\} .$$

Nous considérons une valuation bien spécifiée $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ associée à la boule fermée B , sa restriction μ à $K[x]$ et a dans B tel que ϕ le polynôme irréductible de a sur K définisse la valuation μ . D'après ce qui précède le degré d de ϕ est égal à $\deg_K(B)$, et soient δ et γ tels que nous ayons $B = B(a, \delta)$ et $\mu(\phi) = \gamma$.

Supposons que l'ensemble $R_a(d-1)$ a un plus grand élément δ_1 et soit $d_1 = \rho_a(\delta_1)$, alors pour tout $\delta' \leq \delta_1$ nous avons $\rho_a(\delta') \leq d_1$ et pour tout $\delta' > \delta_1$ nous avons $\rho_a(\delta') = d$. Nous posons $B_1 = B(a, \delta_1)$ et nous choisissons $a_1 \in B_1$ avec $\deg_K(a_1) = d_1$.

Nous appelons $\bar{\mu}_1$ la valuation de $\bar{K}[x]$ associée à la boule B_1 , μ_1 sa restriction à $K[x]$ qui est définie par ϕ_1 le polynôme irréductible de a_1 sur K .

Proposition 4.3. *Le polynôme ϕ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1 et la valuation μ est la valuation augmentée $[\mu_1 ; \mu(\phi) = \gamma]$.*

Preuve. La valuation μ_1 vérifie $\mu_1 \leq \mu$ et nous pouvons considérer l'ensemble

$$\tilde{\Phi}_\mu(\mu_1) = \{f \in K[x] \mid \mu_1(f) < \mu(f)\},$$

cet ensemble est non vide car ϕ vérifie $\mu_1(\phi) < \mu(\phi)$. En effet si nous écrivons

$$\phi = \prod_{i=1}^{d_s} (x - b_i)^{p_i},$$

avec $b_1 = a$ nous avons $\bar{\mu}_1(x - b_i) \leq \bar{\mu}(x - b_i)$ pour tout $i \geq 2$ et $\bar{\mu}_1(x - a) < \bar{\mu}(x - a)$.

Nous appelons d' le degré minimal d'un polynôme appartenant à $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_1)$ et nous considérons l'ensemble

$$\Phi_\mu(\mu_1) = \{\psi \in K[x] \mid \mu_1(\psi) < \mu(\psi), \deg \psi = d' \text{ et } \psi \text{ unitaire}\}.$$

Soit ψ dans $\Phi_\mu(\mu_1)$, alors par construction nous avons $d_1 \leq \deg \psi \leq d$, et d'après [Va 1], théorème 1.15, nous savons que ψ est un polynôme-clé pour la valuation μ_1 et que la valuation augmentée $\mu' = [\mu_1 ; \mu'(\psi) = \gamma']$, avec $\gamma' = \mu(\psi)$ vérifie $\mu_1 \leq \mu' \leq \mu$.

Nous déduisons du théorème 3.14 qu'il existe un prolongement $\bar{\mu}'$ de la valuation μ' à $\bar{K}[x]$ vérifiant $\bar{\mu}_1 \leq \bar{\mu}' \leq \bar{\mu}$. Soit B' la boule associée à $\bar{\mu}'$, nous avons alors $B \subset B' \subset B_1$, en particulier il existe δ' tel que $B' = B(a, \delta')$ et comme la valuation μ' est différente de μ_1 nous avons $\delta' > \delta_1$. Par conséquent nous avons $\deg \psi = \deg \phi$, le polynôme ϕ appartient à l'ensemble $\Phi_\mu(\mu_1)$ et est donc un polynôme-clé pour la valuation μ_1 . □

Supposons maintenant que l'ensemble $R_a(d-1)$ n'a pas de plus grand élément, il existe alors δ_1 dans $R_a(d-1)$ tel que pour tout δ' appartenant à $R_a(d-1)$ avec $\delta' \geq \delta_1$ nous ayons $\rho_a(\delta') = \rho_a(\delta_1) = d_1$, et comme précédemment nous posons $B_1 = B(a, \delta_1)$ et nous choisissons $a_1 \in B_1$ avec $\deg_K(a_1) = d_1$.

Nous choisissons un sous-ensemble $\{\delta_\alpha / \alpha \in A\}$ de $\Gamma_{\bar{\nu}}$, indexé par un ensemble totalement ordonné A sans plus grand élément, avec $\delta_\alpha < \delta_{\alpha'}$ pour $\alpha < \alpha'$ dans A , qui soit cofinal dans l'ensemble $\{\delta' \in R_a(d-1) / \delta' \geq \delta_1\}$.

Nous appelons $\bar{\mu}_\alpha$ la valuation de $\bar{K}[x]$ associée à la boule $B_\alpha = B(a, \delta_\alpha)$ et μ_α sa restriction à $K[x]$. Pour tout $\alpha \in A$ nous choisissons a_α dans la boule $B_\alpha = B(a, \delta_\alpha)$ avec $\deg_K(a_\alpha) = d_1$, et nous appelons ϕ_α le polynôme irréductible de a_α sur K .

Proposition 4.4. *La famille de valuations $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille continue de valuations de $K[x]$, le polynôme ϕ est un polynôme-clé limite pour cette famille et la valuation μ est la valuation augmentée limite $[(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = \gamma]$.*

Preuve. Tous les polynômes ϕ_α sont de même degré et les valuations μ_α vérifient $\mu_\alpha \leq \mu_{\alpha'}$ pour $\alpha \leq \alpha'$, nous en déduisons que la famille $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ est une famille continue de valuations de $K[x]$.

De façon analogue à la démonstration de la proposition 4.3 nous considérons l'ensemble

$$\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_{\alpha'}(f) \text{ pour tout } \alpha < \alpha' \text{ dans } A\},$$

qui est non vide car ϕ y appartient. Si nous appelons $d_{\mathcal{C}}$ le degré minimal d'un polynôme dans $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, par construction nous avons $d_{\mathcal{C}} = d = \deg \phi$, c'est-à-dire que ϕ appartient à l'ensemble

$$\Phi(\mathcal{C}) = \{\psi \in \tilde{\Phi}(\mathcal{C}), \psi \text{ unitaire et } \deg \psi = d_{\mathcal{C}}\},$$

et nous déduisons de la proposition 1.21 de [Va 1] que ϕ est un polynôme-clé limite pour la famille \mathcal{C} et que la valuation μ est la valuation augmentée limite $[(\mu_\alpha)_{\alpha \in A}; \mu(\phi) = \gamma]$. \square

Remarque 4.5. Grâce au corollaire 3.20 nous pouvons associer à toute valuation bien spécifiée $\bar{\mu}$ de $\bar{K}[x]$ une famille de valuations $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = (\bar{\mu}_i)_{i \in I}$ vérifiant :

- (1) la famille $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est une famille associée à la valuation μ de $K[x]$, où nous notons respectivement μ et μ_i la valuation de $K[x]$ restriction de la valuation $\bar{\mu}$ et $\bar{\mu}_i$;
- (2) pour tout $i \leq j$ dans I nous avons $\bar{\mu}_i \leq \bar{\mu}_j$, ce qui est équivalent à $B_j \subset B_i$, où nous appelons B_i la boule fermée de \bar{K} associée à la valuation $\bar{\mu}_i$ de $\bar{K}[x]$.

Nous avons construit cette famille à partir de la construction de la famille \mathcal{A} associée à la valuation μ , et la famille $\mathcal{A} = (\mu_i)_{i \in I}$ est construite en suivant un ordre croissant, c'est-à-dire que pour déterminer la valuation μ_i nous avons besoin de connaître les valuations μ_j pour $j < i$, plus précisément nous considérons les ensembles $\tilde{\Phi}_\mu(\mu_j) = \{f \in K[x] \mid \mu_j(f) < \mu(f)\}$.

Nous pouvons utiliser les résultats précédents pour construire la famille $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = (\bar{\mu}_i)_{i \in I}$ en suivant un ordre décroissant, c'est-à-dire en construisant la valuation $\bar{\mu}_i$ à partir des valuations μ_j pour $j > i$.

Théorème 4.6. Soit $\bar{\mu}$ une valuation bien spécifiée de $\bar{K}[x]$, alors il existe une famille $\mathcal{A}_{\bar{\mu}} = (\bar{\mu}_i)_{i \in I}$ de valuations de $\bar{K}[x]$ vérifiant les propriétés (1) et (2) de la remarque 4.5 obtenue de la façon suivante.

D'après la propriété (2) les boules B_i associées aux valuations $\bar{\mu}_i$ sont de la forme $B_i = B(a, \delta_i)$ avec une famille $(\delta_i)_{i \in I}$ décroissante. Si nous connaissons la valuation $\bar{\mu}_i$ de la famille, les valuations $\bar{\mu}_j$ pour $j < i$ sont déterminées en considérant l'ensemble

$$R_K(\bar{\mu}_i) = \{\delta \mid \deg_K(B(a, \delta)) < \deg_K(B(a, \delta_i))\}.$$

Si cet ensemble a un plus grand élément δ_{i-1} nous construisons la valuation $\bar{\mu}_{i-1}$ comme la valuation associée à la boule $B(a, \delta_{i-1})$, et $i-1$ est le prédécesseur de i dans I .

Si cet ensemble n'a pas de plus grand élément nous choisissons une famille $(\delta_\alpha)_{\alpha \in A}$ cofinale dans $R_K(\bar{\mu}_i)$ et nous définissons la famille $(\bar{\mu}_{i_\alpha})_{i_\alpha \in I_A}$ où la valuation $\bar{\mu}_{i_\alpha}$ est la valuation associée à la boule $B(a, \delta_\alpha)$, et $I_A = (i_\alpha)_{\alpha \in A}$ est la sous-famille de I sans plus grand élément cofinale dans $\{j \in I \mid j < i\}$.

Nous nous arrêtons, c'est-à-dire nous trouvons la première valuation $\bar{\mu}_1$ de la famille quand nous trouvons un ensemble $R_K(\bar{\mu}_i)$ tel que $\deg_K(B(a, \delta)) = 1$, où $\delta = \delta_{i-1}$ ou $\delta = \delta_\alpha$, avec les notations précédentes.

Preuve. C'est une conséquence immédiate des propositions 4.3 et 4.4. □

ANNEXE A. SUITES PSEUDO-CONVERGENTES ET EXTENSION IMMÉDIATE

Dans cette partie nous allons montrer comment il est possible d'interpréter les résultats de Kaplansky sur les familles pseudo-convergentes et les extensions immédiates ([Ka]) à partir des notions de familles admissibles continues et de valuations augmentées limites.

Soit $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille continue de valuations, nous notons respectivement $(\phi_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(\gamma_\alpha)_{\alpha \in A}$ les familles de polynômes-clés et de valeurs dans Γ associées. Nous pouvons supposer que l'ensemble A a un plus petit élément ϑ_0 , nous notons μ la valuation μ_{ϑ_0} et toute valuation μ_α pour $\alpha > \vartheta_0$ est la valuation augmentée $\mu_\alpha = [\mu ; \mu_\alpha(\phi_\alpha) = \gamma_\alpha]$, et nous notons d le degré des polynômes ϕ_α . Rappelons le résultat suivant qui décrit le comportement des valeurs $\mu_\alpha(f)$ pour un polynôme f de $K[x]$ quand α parcourt l'ensemble A , et qui est une conséquence directe du théorème 1.19 de [Va 1].

Théorème A.1. *Soit f dans $K[x]$ de degré m , il existe un entier $v = v_{\mathcal{C}}(f)$ vérifiant $0 \leq v \leq k = [m/d]$, une famille $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq j}$ dans A avec $\vartheta_0 = \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_j$ et δ dans Γ , où $j = k - v$, tels que*

$$\mu_\alpha(f) = \delta + \sum_{i=1}^j \text{Inf}(\gamma_\alpha, \gamma_{\alpha_i}) + v\gamma_\alpha .$$

En particulier f appartient à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C}) = \{f \in K[x] \mid \mu_\alpha(f) < \mu_\beta(f), \forall \alpha < \beta \in A\}$ si et seulement si $v_{\mathcal{C}}(f) > 0$.

Corollaire A.2. *La fonction*

$$\begin{aligned} \mu.(f) : A &\longrightarrow \Gamma \\ \alpha &\longmapsto \mu_\alpha(f) \end{aligned}$$

est linéaire par morceaux et concave.

Plus précisément nous avons

$$\begin{aligned} \mu_\alpha(f) &= \delta_i + (k + 1 - i)\gamma_\alpha \quad \text{pour } \alpha_{i-1} \leq \alpha \leq \alpha_i, 1 \leq i \leq j, \\ \mu_\alpha(f) &= \delta_{j+1} + (k - j)\gamma_\alpha \quad \text{pour } \alpha \geq \alpha_j, \end{aligned}$$

où $\delta_i = \delta + \sum_{l=1}^{i-1} \gamma_l$.

Soit f dans $K[x]$ et pour tout α nous considérons la division euclidienne de f par ϕ_α que nous notons $f = q_\alpha \phi_\alpha + r_\alpha$. Comme le polynôme ϕ_β est un polynôme-clé pour la valuation μ_α pour tout $\beta \geq \alpha$, d'après le lemme 1.1 de [Va 1], nous avons l'inégalité :

$$\mu(r_\beta) = \mu_\alpha(r_\beta) \geq \mu_\alpha(f),$$

avec l'inégalité stricte si et seulement si f est μ_α -divisible par ϕ_β .

Théorème A.3. *Soit f un polynôme dans $K[x]$ et soit $f = q_\alpha \phi_\alpha + r_\alpha$ la division euclidienne de f par le polynôme-clé ϕ_α :*

(1) *si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\alpha > \alpha_1$ nous avons*

$$\mu_\alpha(f) = \mu(r_\alpha) .$$

(2) *si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons*

$$\mu_\alpha(f) \leq \mu(r_\alpha) < \mu_\beta(f) .$$

Corollaire A.4. (1) *Si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons $\mu(r_\beta) = \mu(r_\alpha)$.*

(2) *Si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons $\mu(r_\beta) > \mu(r_\alpha)$.*

Preuve du théorème. Si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, il existe α_1 tel que pour tout $\beta \geq \alpha \geq \alpha_1$ nous avons l'égalité $\mu_\beta(f) = \mu_\alpha(f)$, et de plus le polynôme f n'est pas μ_α -divisible par ϕ_β , d'où l'égalité $\mu(r_\beta) = \mu_\alpha(f)$.

Si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, nous déduisons du corollaire A.2 qu'il existe $\alpha_{[f]}$ dans A , $\delta_{[f]}$ dans Γ et un entier $v_{[f]} \geq 1$ tels que pour tout $\beta \geq \alpha_{[f]}$ nous ayons l'égalité $\mu_\beta(f) = \delta_{[f]} + v_{[f]}\gamma_\beta$.

Pour tout $\beta \leq \alpha$, le polynôme ϕ_α est un polynôme-clé pour la valuation μ_β , par conséquent nous avons $\mu_\beta(f) \leq \mu(r_\alpha)$, de plus pour $\beta < \alpha$ nous avons l'inégalité $\mu_\beta(f) < \mu_\alpha(f)$, par conséquent f est μ_β -divisible par ϕ_α d'où l'inégalité $\mu(r_\alpha) > \mu_\beta(f)$. Nous en déduisons que pour tout β avec $\alpha_{[f]} < \beta < \alpha$ nous avons $\mu_\beta(q_\alpha) = \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\beta$. Nous déduisons du corollaire A.2 que nous avons $\mu_\beta(q_\alpha) \leq \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\beta$ pour tout $\beta > \alpha_{[f]}$, par conséquent pour tout $\beta > \alpha$ nous avons l'inégalité stricte

$$\mu_\beta(q_\alpha \phi_\alpha) \leq \delta_{[f]} + (v_{[f]} - 1)\gamma_\beta + \gamma_\alpha < \delta_{[f]} + v_{[f]}\gamma_\beta = \mu_\beta(f) ,$$

et nous en déduisons $\mu_\beta(f) > \mu(r_\alpha)$.

□

Corollaire A.5. *Si le groupe des valeurs Γ ne possède de pas de plus petit élément strictement positif, c'est-à-dire si le sous-groupe isolé minimal de Γ n'est pas discret, il existe α_1 tel que pour tout $\alpha \geq \alpha_1$ nous avons*

$$\mu_\alpha(f) = \mu(r_\alpha) .$$

Preuve. Grâce au lemme 1.17 de [Va 1] nous pouvons choisir la famille \mathcal{C} de telle façon que toute valeur de Γ supérieure à $\mu_\alpha(f)$ soit atteinte par $\mu_\beta(f)$, pour un β dans A . Par conséquent si Γ ne possède de pas de plus petit élément strictement positif nous déduisons le résultat des inégalités $\mu_\beta(f) > \mu(r_\alpha) \geq \mu_\alpha(f)$.

□

Nous avons vu qu'il est équivalent de se donner une famille pseudo-convergente $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ d'éléments de K et de se donner une famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ de valuations de $K[x]$ telle que les polynômes ϕ_α qui la définissent sont de degré un, c'est-à-dire sont de la forme $\phi_\alpha = x - a_\alpha$

(cf. proposition 2.10). Dans ce cas pour tout polynôme f de $K[x]$ le reste de la division de f par le polynôme-clé $\phi_\alpha = x - a_\alpha$ est égal à $f(a_\alpha)$.

Nous déduisons alors de ce qui précède le résultat suivant.

Corollaire A.6. *Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille pseudo-convergente d'éléments de K , et soit f un polynôme de $K[x]$, alors il existe α_1 tel que pour tout $\beta > \alpha > \alpha_1$ nous avons :*

- (1) *si f n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, alors $\nu(f(a_\beta)) = \nu(f(a_\alpha))$,*
- (2) *si f appartient à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$, alors $\nu(f(a_\beta)) > \nu(f(a_\alpha))$.*

Nous considérons maintenant un corps valué (K, ν) et nous voulons étudier ses extensions immédiates, c'est-à-dire les extensions de corps valués $(L, \nu_L)/(K, \nu)$ telles que les extensions de groupes $\Gamma_{\nu_L}/\Gamma_\nu$ et les extensions résiduelles $\kappa_{\nu_L}/\kappa_\nu$ soient triviales.

Nous remarquons d'abord que d'après la proposition 2.5 si μ est une valuation bien spécifiée de $K(x)$ vérifiant $\Gamma_\nu = \Gamma_\mu$ l'extension résiduelle κ_μ/κ_ν est de degré de transcendance un, en particulier n'est pas triviale. Par conséquent les extensions monogènes immédiates (L, ν_L) de (K, ν) sont définies soit par des pseudo-valuations, c'est le cas d'une extension algébrique L de K , soit par une valuation de $K[x]$ qui n'est pas bien spécifiée, c'est le cas $L = K(x)$.

Proposition A.7. *Si (L, ν_L) est une extension immédiate monogène de (K, ν) , la famille admise \mathcal{A} associée à la valuation ou pseudo-valuation μ de $K[x]$ définie par ν_L est de la forme suivante :*

- (1) *si L est une extension transcendante pure, $L = K(x)$, la famille \mathcal{A} est une famille admissible continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que les polynômes ϕ_α sont de degré un et telle que l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est vide ;*
- (2) *si L est une extension algébrique, $L = K(a) \simeq K[x]/(\phi)$ avec ϕ polynôme irréductible de a sur K , la famille \mathcal{A} est composée d'une famille admissible continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ telle que les polynômes ϕ_α sont de degré un et de la pseudo-valuation μ , où μ est obtenue comme valuation augmentée-limite de la famille \mathcal{C} associée au polynôme-clé limite ϕ .*

Preuve. Si la famille \mathcal{A} associée à la valuation, ou pseudo-valuation μ contient un couple de valuations successives (μ_{i-1}, μ_i) , c'est-à-dire telle que la valuation μ_i est obtenue comme valuation augmentée $\mu_i = [\mu_{i-1} ; \mu_i(\phi_i) = \gamma_i]$, nous déduisons de la proposition 2.5 et de la démonstration de la proposition 2.9 de [Va 4] que nous avons l'inégalité

$$e(\nu_L/\nu)f(\nu_L/\nu) \geq \deg\phi_i/\deg\phi_{i-1} ,$$

où nous notons respectivement $e(\nu_L/\nu)$ et $f(\nu_L/\nu)$ l'indice de ramification et le degré de l'extension résiduelle de $(L, \nu_L)/(K, \nu)$, et où ϕ_{i-1} et ϕ_i sont les polynômes définissant les valuations μ_{i-1} et μ_i .

En particulier si l'extension $(L, \nu_L)/(K, \nu)$ est immédiate nous en déduisons que pour tout couple de valuations successives (μ_{i-1}, μ_i) de la famille \mathcal{A} nous avons l'égalité $\deg\phi_i = \deg\phi_{i-1}$, par conséquent que la famille ne contient pas de partie discrète .

Dans le cas où la valuation μ n'est pas bien spécifiée, la famille admise \mathcal{A} associée à μ est ouverte, elle est constituée d'une seule famille simple \mathcal{S} qui est de la forme $\mathcal{S} = ((\mu_\alpha)_{\alpha \in A})$, avec $\tilde{\Phi}((\mu_\alpha)_{\alpha \in A}) = \emptyset$ (cf. remarque 1.3), et de plus nous déduisons de ce qui précède que tous les polynômes-clés ϕ_α sont de degré un.

Dans le cas où la valuation μ est bien spécifiée, μ est une pseudo-valuation obtenue comme valuation augmentée limite de la famille continue $\mathcal{S} = ((\mu_\alpha)_{\alpha \in A})$, telle que les polynômes-clés ϕ_α sont de degré un, $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = +\infty]$.

□

Proposition A.8. *Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille admissible continue associée définie à la proposition A.7. Alors un polynôme f n'appartient pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ si et seulement si il existe α dans A tel que nous ayons $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$.*

Preuve. Si le polynôme f n'appartient pas à l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ il existe α dans A tel que pour tout $\beta \geq \alpha$ nous ayons $\mu_\alpha(f) = \mu_\beta(f) = \nu_L(f)$, c'est-à-dire tels que f n'est pas μ_α -divisible par ϕ_β . Par conséquent d'après le corollaire A.6, nous avons pour tout $\beta \geq \alpha$ l'égalité $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$.

□

Nous pouvons déduire de ce qui précède les résultats suivants, qui sont des reformulations des théorèmes 2 et 3 de [Ka].

Corollaire A.9. *Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille pseudo-convergente associée, alors l'extension L/K est transcendante si et seulement si pour tout f dans $K[x]$ il existe α dans A tel que nous ayons $\nu_L(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$.*

Preuve. Nous sommes dans le cas d'une extension transcendante si et seulement si l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est vide, c'est-à-dire si et seulement si pour tout f dans $K[x]$ il existe α dans A tel que nous ayons $\mu_\beta(f) = \nu(f(a_\beta))$ pour tout $\beta \geq \alpha$.

□

Corollaire A.10. *Soit (L, ν_L) une extension immédiate monogène de (K, ν) et soit $(a_\alpha)_{\alpha \in A}$ la famille pseudo-convergente associée, et nous supposons que l'extension L/K est algébrique. Alors si ϕ est un polynôme vérifiant $\nu(f(a_\beta)) > \nu(f(a_\alpha))$ de degré minimal, l'extension L est l'extension $L = K(z)$ où z est une racine du polynôme ϕ .*

De plus pour tout y dans L il existe $r(x)$ dans $K[x]$ avec $\text{degr} < \text{deg}\phi$ tel que $y = r(z)$ et la valuation ν_L est définie par $\nu_L(y) = \nu(r(a_\alpha))$ pour α assez grand.

Preuve. Nous sommes dans le cas d'une extension algébrique si et seulement si l'ensemble $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est non vide, tout polynôme unitaire ϕ de degré minimal dans $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ est un polynôme-clé limite pour la famille continue $\mathcal{C} = (\mu_\alpha)_{\alpha \in A}$ et la pseudo-valuation augmentée limite μ de $K[x]$ définie par $\mu = [(\mu_\alpha)_{\alpha \in A} ; \mu(\phi) = +\infty]$ induit une valuation ν_L de l'extension $L = K[x]/(\phi)$ telle que l'extension est immédiate.

De plus tout élément y de L est défini par un polynôme r de degré strictement inférieur au degré de ϕ , par conséquent r n'appartient pas à $\tilde{\Phi}(\mathcal{C})$ et nous trouvons $\nu_L(y) = \mu(r) = \mu_\alpha(r)$ pour α assez grand.

□

RÉFÉRENCES

- [A-P 1] V. Alexandru and N. Popescu : Sur une classe de prolongements à $K(X)$ d'une valuation sur un corps K . Rev. Roum. Math. Pures Appl. **33** (1988), 393-400.
- [Ka] I. Kaplansky, Maximal Fields with Valuation, Duke Math. J. **9**, (1942), 303-321.
- [Le 1] Lê D.T. : La monodromie n'a pas de points fixes, J. of Fac. Sc., Univ. Tokyo, Sec. 1A, vol. 22 (1975), 409-427.
- [Le 2] Lê D.T. : The geometry of the monodromy theorem. in C.P. Ramanujam - A Tribute, Tata Institute, Springer Verlag (1979), 191-208.
- [McL 1] S. MacLane : A construction for absolute values in polynomial rings. Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), 363-395.
- [McL 2] S. MacLane : A construction for prime ideals as absolute values of an algebraic field. Duke Math. J. **2** (1936), 492-510.
- [Na] M. Nagata : A theorem on valuation rings and its applications. Nagoya Math. J. **29** (1967), 85-91.
- [Oh] J. Ohm : The ruled residue theorem for simple transcendental extensions of valued fields. Proc. Amer. Math. Soc. **89** (1983), 16-18.
- [Os] A. Ostrowski, Untersuchungen zur arithmetischen Theorie der Körper, Math. Z. **39**, (1935), 269-404.
- [Va 1] M. Vaquié : Extension d'une valuation. Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 3439-3481.
- [Va 2] M. Vaquié : Famille admise associée à une valuation de $K[x]$, Sem. et Congr. **10** (2005), 391-428.
- [Va 3] M. Vaquié : Algèbre graduée associée à une valuation de $K[x]$. Adv. Stud. in Pur. Math. **46** (2007), 259-271.
- [Va 4] M. Vaquié : Famille admise de valuations et défaut d'une extension. Jour. Alg. **311** (2007), 859-876.
- [Va 5] M. Vaquié : Extension de valuation et polygone de Newton. Ann. Inst. Fourier **58** (2008), 2503-2541.
- [Va 6] M. Vaquié : Famille admise associée à une valuation de $K(X)$. Bull. London Math. Soc. (à paraître).

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE TOULOUSE UMR 5219, CNRS, UNIVERSITÉ DE TOULOUSE, UPS, 118
ROUTE DE NARBONNE, F-31062 TOULOUSE CEDEX 9, FRANCE

Email address: vaquie@math.univ-toulouse.fr